# Konkurs matematyczny im. Samuela Chróścikowskiego

**Państwowa Akademia Nauk Stosowanych w Chełmie**

ul. Pocztowa 54, 22–100 Chełm, Poland

https://panschelm.edu.pl/

**CHEŁM 2024**

# Spis treści

# 1 Wstęp

W 2006 roku, w ramach prowadzonych, przez Instytut Matematyki i Informatyki Państwowej Akademii Nauk Stosowanych w Chełmie, działań mających na celu popularyzację matematyki wśród młodzieży szkół ponadgimnazjalnych po raz pierwszy zorganizowano Konkurs Matematyczny im. Samuela Chróścikowskiego. Zamiarem jego pomysłodawców było stworzenie płaszczyzny rywalizacji matematycznej dla uczniów szkół Chełma i okolic.

Rzeczywistość przerosła zamierzenia organizatorów – konkurs solidnie i na trwałe wpisał się w kalendarz imprez matematycznych nie tylko Chełma, ale całego województwa lubelskiego, z czasem wykraczając również poza jego obszar. Instytut Matematyki i Informatyki PANS w Chełmie, organizator konkursu, wypełnił w ten sposób lukę jaka oddziela Olimpiady matematyczne, których poziom znacznie przekracza możliwości większości licealistów, od istniejących konkursów o nastawieniu komercyjnym. Atrakcyjność konkursu im. Samuela Chróścikowskiego polega nie tylko na doborowym towarzystwie uczestników, bardzo atrakcyjnych nagrodach, ale przede wszystkim na wyjątkowo starannym doborze zadań, który powoduje, że uczestnictwo w konkursie jest prawdziwą ucztą intelektualną dla uczniów zainteresowanych matematyką.

W ciągu minionych 17 lat w konkursie wzięło udział ponad 3.000 uczniów szkół ponadgimnazjalnych i ponadpodstawowych. W latach 2007-2009 obowiązywał jeden test dla wszystkich klas ponadgimnazjalnych, natomiast od roku 2010 organizatorzy zdecydowali się na rozdzielenie wiadomości i umiejętności z matematyki, wprowadzając podział materiału na dwie kategorie.

Niniejsza publikacja zawiera wszystkie zadania, jakie do tej pory rozwiązywali uczniowie na konkursie. Każdy test składa się z 20 zadań zamkniętych i 2 zadań otwartych oprócz testu z roku 2021. Wtedy po raz pierwszy w historii konkursu z powodu pandemii uczniowie rywalizowali ze sobą zdalnie, zza komputerów. W tej edycji rywalizacji wykładowcy Instytutu Matematyki i Informatyki przygotowali dla uczestników w każdej kategorii po 20 zadań zamkniętych z różnych działów matematyki. Każde zadanie zamknięte zawiera informacje wstępne oraz trzy propozycje rozwiązań poprzedzone pustymi prostokątami. W każdy prostokąt należy wpisać TAK lub NIE. Za każdą z poprawnie udzielonych odpowiedzi w poszczególnych zadaniach uczestnik otrzyma 1 pkt. Jeśli wszystkie trzy udzielone odpowiedzi będą prawidłowe uczestnik dodatkowo otrzymuje 1 pkt. Brak odpowiedzi na pytanie będzie traktowana jako odpowiedź błędna. Za każde zadanie otwarte można otrzymać maksymalnie 5 pkt.

W trakcie rozwiązywania zadań pomocnicze obliczenia można wykonywać jedynie na kartkach załączonych do testu. W czasie trwania testu nie można korzystać z tablic matematycznych, kalkulatorów i innych pomocy naukowych.

# 2 Bez podziału na kategorie

## 2.1 27 marca 2007

**Zadanie 1.** Liczba $999^3$ jest

☐ a) podzielna przez 3,
☐ b) liczbą pierwszą,
☐ c) równa 997002999.

**Zadanie 2.** Niech $A = 2007^{\log 2006}$ oraz $B = 2006^{\log 2007}$, gdzie log oznacza logarytm przy podstawie 10. Wtedy

☐ a) $B < A$,
☐ b) $B = A$,
☐ c) $A < 10^8$.

**Zadanie 3.** Mamy do dyspozycji dwa naczynia o pojemnościach $2+\sqrt{2}$ oraz $2-\sqrt{2}$ litra. Posługując się nimi jesteśmy w stanie odmierzyć dokładnie

☐ a) $6-\sqrt{2}$ litra,
☐ b) 2 litry,
☐ c) $8+2\sqrt{2}$ litra.

**Zadanie 4.** Równanie $\sin^7 x \cos^7 x = \frac{1}{127}$

☐ a) ma nieskończenie wiele rozwiązań,
☐ b) nie ma rozwiązania,
☐ c) ma co najmniej 7 rozwiązań.

**Zadanie 5.** Sześciu pracowników wykonało pewną pracę w ciągu 12 dni, a zatem 8 pracowników pracujących tak samo wydajnie wykona tę pracę w ciągu

☐ a) 16 dni,
☐ b) mniej niż 11 dni,
☐ c) więcej niż 5 dni.

**Zadanie 6.** Liczby $x_1$ i $x_2$ są różnymi pierwiastkami równania $x^2+2ax+1=0$ dla $a \in \mathbb{R}$. Wynika stąd, że

☐ a) $(x_1+x_2)^2 > 1$,
☐ b) $x_1+x_2 > x_1 \cdot x_2$,
☐ c) $x_1^2+x_2^2 > 1$.

**Zadanie 7.** Liczba $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\dots}}}$

☐ a) jest naturalna,
☐ b) jest równa 2,
☐ c) jest niewymierna.

**Zadanie 8.** W trapezie $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie $O$. Przyjmijmy, że pole trapezu wynosi $S$ a trójkątów $ABO$, $CDO$ odpowiednio $S_1$ i $S_2$. Czy prawdziwe są zdania:

- [ ] a) trójkąty $ABO$ i $CDO$ są podobne,
- [ ] b) $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$,
- [ ] c) trójkąty $AOD$ i $BCO$ mają równe pola.

**Zadanie 9.** Dany jest wielomian $W(x) = x^{9735!} + x^{19!} + 1$. Wówczas $W(-371)$ jest

- [ ] a) liczbą nieparzystą,
- [ ] b) liczbą ujemną,
- [ ] c) liczbą naturalną.

**Zadanie 10.** Rozwiązaniem równania $||||||||||x+1|+1|+1|+1|+1|+1|+1|+1|+1|+1| = 0$ jest:

- [ ] a) $x = 2$,
- [ ] b) $x = 0$,
- [ ] c) $x = -10$.

**Zadanie 11.** Funkcja $f$ dana jest wzorem $f(x) = (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \ldots + (x-a_k)^2$, gdzie $k \geqslant 2$. Wynika stąd, że funkca $f$

- [ ] a) nie ma miejsc zerowych,
- [ ] b) ma co najwyżej jedno miejsce zerowe,
- [ ] c) najmniejszą wartość przyjmuje dla $x = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}$.

**Zadanie 12.** Jeśli $x + \frac{1}{x} = 3$ to

- [ ] a) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$,
- [ ] b) $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$,
- [ ] c) $x^4 + \frac{1}{x^4} = 49$.

**Zadanie 13.** Dana jest następująca tabela liczb naturalnych:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 2 & 4 & 6 & \ldots & 2n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n & 2n & 3n & \ldots & n^2 \end{array}$$

Suma wszystkich liczb w tej tablicy wynosi 3025. Wobec tego

- [ ] a) $n = 15$,
- [ ] b) $n = 10$,
- [ ] c) $n$ jest podzielne przez 5.

**Zadanie 14.** Spośród liczb $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$ do przedziału $(1,2)$ należą

- [ ] a) pierwsza i trzecia,
- [ ] b) wszystkie,
- [ ] c) żadna.

**Zadanie 15.** Nierówność $|(x-1)(x+2)| + |x^2-4| \leqslant 0$

- [ ] a) ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- [ ] b) ma co najwyżej trzy rozwiązania,
- [ ] c) jest sprzeczna.

**Zadanie 16.** Niech $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$. Wówczas

- [ ] a) jest funkcją różnowartościową,
- [ ] b) istnieją dokładnie 4 punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu funkcji $f$,
- [ ] c) styczna do wykresu funkcji $f$ w punkcie $(0, -1)$ jest równoległa do prostej o równaniu $y = 3x + 20!$.

**Zadanie 17.** Liczba $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$

- [ ] a) ma $\frac{8!}{(8-3)!}$ dzielników,
- [ ] b) jest podzielna przez 210,
- [ ] c) ma 256 dzielników.

**Zadanie 18.** Tomek rozgrywa z równorzędnym przeciwnikiem 4 partie w szachy i 8 partii w warcaby.

- [ ] a) Szansa wygrania 3 partii w szachy jest większa niż 6 partii w warcaby.
- [ ] b) Szansa wygrania 3 partii w szachy jest taka sama jak wygrana 6 partii w warcaby.
- [ ] c) Szansa wygrania 3 partii w szachy jest dwa razy większa niż 6 partii w warcaby.

**Zadanie 19.** Pola trzech ścian prostopadłościanu mających wspólny wierzchołek są odpowiednio równe $X, Y, Z$. Wówczas objętość tego prostopadłościanu jest równa:

- [ ] a) $XYZ$,
- [ ] b) $\sqrt{XYZ}$,
- [ ] c) $\sqrt[3]{XYZ}$.

**Zadanie 20.** Cztery proste mogą podzielić płaszczyznę na dokładnie

- [ ] a) 8 części,
- [ ] b) 9 części,
- [ ] c) 11 części.

## ZADANIA OTWARTE

1. *Pielgrzym do Rzymu idący uczyni na dzień mil 6. drugi po nim w 5. dni wyszedłszy chce go dogonić za dni 10. Pytam się, wiele mil na dzień uyść powinien, żeby się dziesiątego dnia zszedł z nim?*

2. *Mąż zapisuie testaméntém żonie swoiey złotych 14000, ieżeli powiie Córkę, téy zaś Córce Zł: 7000: przeciwnie, ieżeli powiie Syna, tedy Synowi zapisuie Zł:14000, a Matce 7000. Zdárzá się, że Matka powiiá razém Syna i Córkę. Jakże przyydzie podzielić bez krzywdy między Matkę i Dzieci maiątek Męża?*

Źródło: „Stare polskie zadania z matematyki", Witold Więsław, Opole 2000.

## 2.2 13 marca 2008

**Zadanie 1.** Zbiór punktów płaszczyzny $\{(x, y) : |x - y| + 1 \leqslant |x + y|\}$

- [ ] a) jest symetryczny względem prostej $y = x$,
- [ ] b) ma środek symetrii,
- [ ] c) jest zbiorem ograniczonym.

**Zadanie 2.** Liczba $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$

- [ ] a) jest liczbą ujemną,
- [ ] b) jest równa -1,
- [ ] c) jest liczbą niewymierną.

**Zadanie 3.** Równanie $10^{\sin x} = x$ ma

- [ ] a) nieskończenie wiele rozwiązań,
- [ ] b) co najmniej jedno rozwiązanie,
- [ ] c) dokładnie trzy rozwiązania.

**Zadanie 4.** Dwa okręgi styczne zewnętrznie mają wspólne styczne przecinające się pod kątem $\alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Niech $p > 1$ oznacza stosunek promieni tych okręgów. Zatem:

- [ ] a) jeżeli $p = 3$, to $\alpha = 30^0$,
- [ ] b) $p = \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$,
- [ ] c) jeżeli $\alpha = 60^0$, to $p = 3$.

**Zadanie 5.** Liczby $a, b$; $0 < a < b$ są takimi liczbami całkowitymi, że 3 nie dzieli $a \cdot b$. Wynika stąd, że liczba 3 dzieli zawsze:

- [ ] a) $a + b$,
- [ ] b) $a - b$,
- [ ] c) $a^2 - b^2$.

**Zadanie 6.** Rozważmy taki ciąg kwadratów $\{k_n\}$, że bok kwadratu $k_n$ jest co do długości równy przekątnej kwadratu $k_{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Jeżeli $\{|k_n|\}$ jest ciągiem pól tych kwadratów o $k_1 = 1$, to

- [ ] a) ciąg $\{|k_n|\}$ jest ciągiem geometrycznym,
- [ ] b) $\lim\limits_{n\to\infty} |k_n| = 0$,
- [ ] c) $\lim\limits_{n\to\infty} (|k_1| + |k_2| + \ldots + |k_n|) = 2$.

**Zadanie 7.** Prawdziwa jest nierówność

- [ ] a) $2^{\sqrt{5}} > 4$,
- [ ] b) $\sqrt{5}^{\sqrt{2}} < 5$,
- [ ] c) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\sqrt{2}} > \frac{1}{27}$.

**Zadanie 8.** Osoba wędruje po płaszczyźnie $OXY$ od punktu $A(0,0)$ do punktu $B(3,3)$ stawiając kroki tylko o długości 1 i tylko w kierunku poziomym - na prawo lub pionowym - do góry. Wynika stąd, że może ona przejść do punktu $B$ na:

☐ a) $\frac{6!}{(3!)^2}$ sposobów,

☐ b) $2^6$ sposobów,

☐ c) 20 sposobów.

**Zadanie 9.** Wahania kursów akcji w okresie jednego roku opisuje funkcja

$$f(t) = 14 + 10\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 12.$$

Zatem

☐ a) wahania kursów akcji są okresowe,

☐ b) najwyższy kurs został osiągnięty co najmniej raz,

☐ c) kurs najwyższy wyniósł 25.

**Zadanie 10.** Jeśli przekątna trapezu równoramiennego zawiera się w dwusiecznej kąta ostrego i stosunek dłuższej podstawy do krótszej jest równy 2, to:

☐ a) ramię jest równe krótszej podstawie,

☐ b) przekątna jest prostopadła do jednego z ramion,

☐ c) kąt ostry trapezu ma miarę $60^0$.

**Zadanie 11.** Zbiór rozwiązań nierówności $(x-1)^k(x-2)^l(x-3)^m \leqslant 0$, gdzie $k, l, m \in \mathbb{N}_+$ jest zbiorem ograniczonym. Wynika stąd, że

☐ a) liczby $k, l, m$ są parzyste,

☐ b) co najmniej jedna z liczb $k, l, m$ jest parzysta,

☐ c) liczba $k + l + m$ jest parzysta.

**Zadanie 12.** Dane jest równanie $x^{n+2} + 64 = x^{n+1} + 64x$, gdzie $n$ jest nieparzystą liczbą naturalną. Wynika stąd, że równanie to ma:

☐ a) dwa pierwiastki,

☐ b) trzy pierwiastki,

☐ c) trzy pierwiastki całkowite.

**Zadanie 13.** Funkcja $f$ dana jest wzorem $f(x) = ||x| - 3| - 2$. Wynika stąd, że

☐ a) funkcja $f$ ma cztery miejsca zerowe,

☐ b) $f$ nie jest funkcją nieparzystą,

☐ c) największą wartością funkcji jest liczba 1.

**Zadanie 14.** Punkty $A, B, C$ są różnymi punktami okręgu o środku $S$ takimi, że styczna do okręgu w punkcie $A$ przecina prostą $BC$ w punkcie $D$ i $|DB| < |DC|$. Wówczas

☐ a) miara kąta $ASB$ jest dwukrotnie mniejsza niż miara kąta $BAD$,

☐ b) trójkąty $ABD$ i $ACD$ są podobne,

☐ c) $|CD| \cdot |BD| = |AD|^2$.

**Zadanie 15.** Liczba $a = \log(\tan 43^0) + \log(\tan 44^0) + \log(\tan 45^0) + \log(\tan 46^0) + \log(\tan 47^0)$

☐ a) jest liczbą całkowitą,
☐ b) jest równa 1,
☐ c) jest równa 0.

**Zadanie 16.** O zdarzeniach $A$ i $B$ wiadomo, że zawsze zachodzi co najmniej jedno z nich, są jednakowo prawdopodobne i $P(A|B) = \frac{1}{4}$. Wobec tego:

☐ a) $P(A) = P(B) = \frac{4}{7}$,
☐ b) $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$,
☐ c) $P(A) = P(B) = \frac{3}{4}$.

**Zadanie 17.** Suma dwóch cyfr liczby trzycyfrowej $m$ jest równa 10. Wynika stąd, że:

☐ a) $m \leqslant 820$,
☐ b) $m \leqslant 910$,
☐ c) $m \leqslant 995$.

**Zadanie 18.** Ośmiościan foremny przekształcono przez pewną jednokładność o skali $\sqrt{3}$. W wyniku tego

☐ a) objętość wzrosła co najmniej o 400%,
☐ b) pole powierzchni całkowitej wzrosło co najmniej o 200%,
☐ c) długość najdłuższej przekątnej wzrosła co najmniej o 75%.

**Zadanie 19.** $n$ - ta suma częściowa ciągu $(a_n)$ wyraża się wzorem $S_n = 3n^2$. Wobec tego:

☐ a) $a_8 + a_9 + a_{10} = 153$,
☐ b) $n$ - ty wyraz ciągu $(a_n)$ jest równy $3n$,
☐ c) $n$ - ty wyraz ciągu $(a_n)$ jest równy $6n - 3$.

**Zadanie 20.** Funkcja $f$ dana jest wzorem $f(x) = \frac{x}{x-1}$ i niech $f^n(x) = f(f(\ldots(f(x))\ldots))$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$. Wówczas dla każdego $x \neq 1$

☐ a) $f^2(x) = x$,
☐ b) $f^6(3) = 3$,
☐ c) $f^9(3) = 1,5$.

## ZADANIA OTWARTE

1. *Bawiły się raz małpy - wieść indyjska niesie -*
   *Ósma ich część w kwadracie już skacze po lesie,*
   *Pozostałych dwanaście w pląsach i z wrzaskami*
   *Pomiędzy zielonymi hasa pagórkami.*
   *Ileż ich wszystkich było? - pyta się Bhashara,*
   *Zagadka nie trudna, chociaż bardzo stara.*

2. *Znalèźć trzy liczby proporcyi Arytmetycznèy, których summa kwadratów iest 200, a kwadràt s̀rzednièy przewyższà wieloczyn skraynych cztèrèma iednościami.*

Źródło: „Stare polskie zadania z matematyki", Witold Więsław, Opole 2000.

## 2.3 13 marca 2009

**Zadanie 1.** Pięćdziesiąty wyraz ciągu arytmetycznego $(a_n)$ jest równy 10. Z tego wynika, że

- [ ] a) $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 30$, dla $n = 49$,
- [ ] b) $S_{50} = 500$,
- [ ] c) $S_{99} = 990$.

**Zadanie 2.** Wiemy, że $a + b = 1$. Czy z tego wynika, że

- [ ] a) $a^2 + b^2 \geqslant \frac{1}{2}$,
- [ ] b) $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$,
- [ ] c) $(a + b)^2 \geqslant 4ab$.

**Zadanie 3.** W pewnej szkole liczba uczniów zmniejszyła się w ciągu roku o 10%, zaś liczba uczennic zwiększyła się z 50% do 55%. Liczba uczennic

- [ ] a) zwiększyła się o $0,5\%$,
- [ ] b) zmniejszyła się o 1%,
- [ ] c) zmniejszyła się około $0,5\%$.

**Zadanie 4.** Można tak dobrać liczbę $a \in \mathbb{R}$, aby równanie $x^2 - |x| + a = 0$

- [ ] a) nie miało rozwiązań,
- [ ] b) miało cztery rozwiązania,
- [ ] c) miało dokładnie trzy rozwiązania.

**Zadanie 5.** Niech $g(x) = x^2 + 2x + 1$ i $f(x) = g(g(x))$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wówczas

- [ ] a) zbiorem wartości funkcji $f$ jest przedział $\langle 0, +\infty)$,
- [ ] b) zbiorem wartości funkcji $f$ jest przedział $\langle 1, +\infty)$,
- [ ] c) zbiorem wartości funkcji $g$ jest przedział $\langle 0, +\infty)$.

**Zadanie 6.** Istnieje taka liczba $b \in \mathbb{R}$, że zbiór rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2bx = 0 \\ x^2 + y^2 - 2by = 0 \end{cases}$$

- [ ] a) jest zbiorem dwuelementowym,
- [ ] b) jest zbiorem jednoelementowym,
- [ ] c) jest zbiorem pustym.

**Zadanie 7.** Jeżeli pole pięciokąta opisanego na okręgu o promieniu 1 jest równe 16, to długości jego boków nie są kolejnymi liczbami

- [ ] a) naturalnymi,
- [ ] b) nieparzystymi,
- [ ] c) parzystymi.

**Zadanie 8.** Można tak dobrać liczby $a, b, c, d$, aby zbiór rozwiązań nierówności $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) < 0$ był

☐ a) zbiorem pustym,
☐ b) zbiorem nieograniczonym,
☐ c) przedziałem.

**Zadanie 9.** Niech $a = \sin(17!\pi)$, $b = \cos(19!\pi)$, $c = \mathrm{tg}(21!\pi)$. Wobec tego

☐ a) $a < b$,
☐ b) $b < c$,
☐ c) $a = c$.

**Zadanie 10.** Liczba

☐ a) $2^{13}$ ma 14 dzielników,
☐ b) $2^{13} \cdot 3^4$ ma 70 dzielników,
☐ c) $2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^6$ ma 210 dzielników.

**Zadanie 11.** Równanie $\cos(\sin x) = 0$

☐ a) ma nieskończenie wiele rozwiązań,
☐ b) nie ma rozwiązań,
☐ c) ma co najmniej jedno rozwiązanie.

**Zadanie 12.** Rozwiązaniem równania $\sqrt[\mathrm{NWD}(8602,910)]{\left(\sqrt{10}\right)^{-2} \cdot \mathrm{NWW}(72,180) \cdot x^2} = 6$ jest

☐ a) liczba z przedziału $\langle -1, \frac{1}{2} \rangle$,
☐ b) $\log_2 4$,
☐ c) $0!$.

**Zadanie 13.** Aby otrzymać 20 kg solanki ośmioprocentowej należy zmieszać $a$ kilogramów solanki dziesięcioprocentowej i $b$ kilogramów solanki dwuprocentowej. Zatem

☐ a) $a = b$,
☐ b) $a = 3b$,
☐ c) $a - b = 10$.

**Zadanie 14.** Niech punkt $P$ będzie punktem wewnętrznym czworościanu foremnego o boku 1, a $d$ sumą odległości punktu $P$ od wszystkich ścian czworościanu. Zatem

☐ a) $d$ nie zależy od położenia punktu $P$,
☐ b) wysokość czworościanu ma długość $2d$,
☐ c) $d = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

**Zadanie 15.** Ze zbioru $\{n, n+1, n+2, \ldots, n+14\}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ losujemy jedną liczbę. Prawdopodobieństwo wylosowania

☐ a) liczby podzielnej przez 5 jest równe $\frac{1}{5}$,
☐ b) liczby podzielnej przez 3 jest równe $\frac{1}{3}$,
☐ c) liczby podzielnej przez 2 jest równe $\frac{1}{2}$.

**Zadanie 16.** Dane jest równanie $x^2 + ax - 1 = 0$. Wobec tego

- [ ] a) suma kwadratów pierwiastków tego równania jest równa $a^2 - 4$,
- [ ] b) suma sześcianów pierwiastków tego równania jest równa $a^3 + 3a$,
- [ ] c) suma czwartych potęg pierwiastków tego równania jest równa $a^4 + 4a^2 + 4$.

**Zadanie 17.** Prosta przechodząca przez wierzchołek $B$ równoległoboku $ABCD$ i równoległa do jego przekątnej $AC$ przecina prostą $CD$ w punkcie $K$. Wobec tego

- [ ] a) pole równoległoboku $ABKC$ jest różne od pola trójkąta $BKD$,
- [ ] b) pole równoległoboku $ABCD$ jest równe polu trójkąta $AKD$,
- [ ] c) pole równoległoboku $ABCD$ i $ABKC$ są równe.

**Zadanie 18.** Istnieje taka liczba $n \in \mathbb{R}$, że zbiór rozwiązań nierówności $|x| + n < \frac{1}{|x|}$

- [ ] a) jest zbiorem pustym,
- [ ] b) jest równy $\mathbb{R}\setminus\{0\}$,
- [ ] c) jest zawarty w przedziale $\left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$.

**Zadanie 19.** Ciąg $(a_n)$ jest arytmetyczny, a ciąg $(b_n)$ określony jest wzorem $b_n = p^{a_n}$, gdzie $p \in (0, \infty)$. Wynika stąd, że $(b_n)$ jest

- [ ] a) ciągiem arytmetycznym,
- [ ] b) ciągiem geometrycznym o ilorazie $p^{a_1}$,
- [ ] c) ciągiem geometrycznym o ilorazie $p^{a_2 - a_1}$.

**Zadanie 20.** W trapez równoramienny o podstawach długości $a$ i $9a$ wpisano okrąg. Wówczas

- [ ] a) ramię trapezu ma długość $5a$,
- [ ] b) stosunek obwodu trapezu do średnicy okręgu jest równy 20:3,
- [ ] c) przekątna trapezu ma długość $6a$.

## ZADANIA OTWARTE

1. Stara legenda głosi, że czeska królewna Libusza obiecała oddać swą rękę temu z trzech ubiegających się o nią rycerzy, który rozwiąże takie oto zadanie:
   *Ile brzoskwiń mieści koszyk, z którego połowę całej zawartości oraz jedną brzoskwinię oddam pierwszemu, połowę reszty i jedną brzoskwinię drugiemu, a trzeciemu połowę pozostałych owoców i trzy ostatnie brzoskwinie?*

2. Jeśli 1 jard sukna kupujesz za 6 szylingów i 8 pensów, a sprzedajesz za 8 szylingów i 6 pensów, to ile zarobisz na każdych 100 szylingach zainwestowanych w taką transakcję? (1 szyling to 12 pensów)

# 3 Kategoria I

Uczniowie klasy I i II szkoły ponadpodstawowej.

Zakres materiału:

- Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory. Działania w zbiorze liczb rzeczywistych.
- Język matematyki
- Funkcje (określanie funkcji, własności funkcji, przekształcenia wykresu funkcji)
- Funkcja liniowa
- Funkcja kwadratowa
- Planimetria
- Wielomiany i funkcje wymierne
- Funkcje trygonometryczne
- Geometria analityczna

## 3.1 26 marca 2010

**Zadanie 1.** Ile procent pola koła stanowi pole trójkąta równobocznego wpisanego w to koło

- [ ] a) 41%,
- [ ] b) więcej niż 40%,
- [ ] c) mniej niż 44%.

**Zadanie 2.** Zbiór punktów $(x, y)$ płaszczyzny takich, że $|x - y| + |x| \leqslant 2$.

- [ ] a) jest symetryczny względem osi $OX$,
- [ ] b) jest symetryczny względem osi $OY$,
- [ ] c) jest równoległobokiem.

**Zadanie 3.** Liczba $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ jest

- [ ] a) niewymierna,
- [ ] b) mniejsza od 2,
- [ ] c) równa $-2$.

**Zadanie 4.** Układ równań $\begin{cases} x \cdot y = 30 \\ y \cdot z = 35 \\ z \cdot x = 42 \end{cases}$ jest spełniony przez

- [ ] a) co najmniej jedną trójkę $(x, y, z)$ liczb całkowitych dodatnich,
- [ ] b) dokładnie jedną trójkę $(x, y, z)$ liczb całkowitych dodatnich,
- [ ] c) dokładnie sześć trójek $(x, y, z)$ liczb całkowitych dodatnich.

**Zadanie 5.** Liczby naturalne $a$ i $b$ w dzieleniu przez 17 dają odpowiednio reszty 1 i 2. Z tego wynika, że liczba $a + b$ w dzieleniu przez 17 daje resztę, która jest liczbą

- [ ] a) zależną od liczb $a$ i $b$,
- [ ] b) liczbą pierwszą lub większą od 13,
- [ ] c) nieparzystą.

**Zadanie 6.** Wykresem funkcji $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ jest

- [ ] a) hiperbola,
- [ ] b) prosta,
- [ ] c) półprosta.

**Zadanie 7.** Funkcja $g$ jest określona na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych. Dla dowolnych $x$ i $y$ spełnia ona równanie $g(x \cdot y) = g(x) + g(y)$. Wartość $g(2010)$ jest

- [ ] a) równa 2010,
- [ ] b) równa 0,
- [ ] c) nie większa niż 1005.

**Zadanie 8.** Na ile maksymalnie części podzieli kulę 7 kół należących do tej kuli?

- [ ] a) 11,
- [ ] b) nie mniej niż 22,
- [ ] c) 44.

**Zadanie 9.** Która z figur płaskich opisanych równaniem ma środek symetrii?

- [ ] a) $2x^2 + 2y^2 = 3$,
- [ ] b) $2x^2 - 3y = 0$,
- [ ] c) $(2x + 3y)^2 = 1$.

**Zadanie 10.** Równanie $(x^{2011} - x^{2010} + x^{2009} - x^{2008} + \ldots - 1)(x + 1) = 0$ ma

- [ ] a) 2010 różnych rozwiązań,
- [ ] b) 2011 różnych rozwiązań,
- [ ] c) 2 rozwiązania.

**Zadanie 11.** Reszta z dzielenia liczby $2010^3$ przez 13

- [ ] a) wynosi $3375^{0,(3)}$,
- [ ] b) jest podzielna przez 5,
- [ ] c) jest liczbą pierwszą.

**Zadanie 12.** Dla pewnej wartości parametru $m$ podzbiór płaszczyzny opisany układem nierówności

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4 \\ x^2 + y^2 \geqslant m^2 \end{cases}$$

- [ ] a) jest okręgiem,
- [ ] b) jest kołem,
- [ ] c) jest zbiorem nieograniczonym.

**Zadanie 13.** Dla pewnego ciągu arytmetycznego $a_n$ zachodzi równość $2S_{2n} = S_{4n}$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Wynika z tego, że

- [ ] a) ciąg $a_n$ jest stały,
- [ ] b) ciąg $a_n$ jest rosnący,
- [ ] c) ciąg $a_n$ jest niemalejący.

**Zadanie 14.** Suma $\sin^2 1^o + \sin^2 2^o + \sin^2 3^o + \ldots + \sin^2 89^o + \sin^2 90^o$ wynosi

- [ ] a) nie mniej niż 45,
- [ ] b) 45,5,
- [ ] c) 45.

**Zadanie 15.** Istnieje romb o boku długości $a$ i przekątnych długości $d_1$ i $d_2$ dla

- [ ] a) $a = 5, \quad d_1 = 6, \quad d_2 = 8$,
- [ ] b) $a = 5, \quad d_1 \in (0, 10), \quad d_2 = \sqrt{100 - d_1^2}$,
- [ ] c) $a = 5, \quad d_1 \in (0, 5), \quad d_2 = \sqrt{25 - d_1^2}$.

**Zadanie 16.** Wielomian $(x^3 - 3x^2 + 4)^{2000}$ w dzieleniu przez wielomian:

- [ ] a) $x - 1$ daje resztę, która jest liczbą nieparzystą,
- [ ] b) $x + 1$ daje resztę, która jest liczbą pierwszą,
- [ ] c) $x^2 - 1$ daje resztę, która jest wielomianem stopnia pierwszego.

**Zadanie 17.** Funkcja $f$ jest określona wzorem $f(x) = \frac{x+a}{x-1}$, gdzie $a \in \mathbb{R}$. Istnieje takie $a$, że

- [ ] a) wykres funkcji zawiera się w prostej o równaniu $y = 1$,
- [ ] b) wykresem funkcji jest prosta,
- [ ] c) funkcja ma dwa miejsca zerowe.

**Zadanie 18.** Ramię trójkąta równoramiennego jest równe promieniowi $R$ okręgu opisanego na tym trójkącie. Wobec tego

- [ ] a) trójkąt ten jest ostrokątny,
- [ ] b) trójkąt ten jest rozwartokątny,
- [ ] c) pole trójkąta jest równe $\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

**Zadanie 19.** Na osi liczbowej zaznaczono punkt $A$ o współrzędnej $a$ oraz punkt $G$ o współrzędnej $g$. Liczby $a$ i $g$ spełniają nierówność $|a - g| < 1$. Wynika stąd, że

- [ ] a) odległość punktu $A$ od punktu $G$ jest mniejsza od 1,
- [ ] b) $-1 < a - g < 1$,
- [ ] c) $a \in (g - 1; g + 1)$.

**Zadanie 20.** Prosta o równaniu $x = 2$ jest osią symetrii wykresu funkcji kwadratowej $f$. Wobec tego dla każdej liczby rzeczywistej $t$

- [ ] a) $f(t) = f(-t)$,
- [ ] b) $f(2 - t) = f(2 + t)$,
- [ ] c) $f(t - 2) = f(t + 2)$.

## ZADANIA OTWARTE

1. *Punkty $S$ i $T$ dzielą średnicę okręgu na trzy równe części. Punkt $P$ należący do okręgu jest odległy od punktu $S$ o 7 cm, a od punktu $T$ o 9 cm. Oblicz odległość między punktami $S$ i $T$.*

2. *Pewny Kupiec na początku każdégo roku wyłączá z kapitału swégo co rok na wydátki Zł.1200: resztą zaś kapitáłu tak pomyślnie zarábiá, że na końcu każdégo roku dwoi kapitáł pozostały. Przy końcu 3 lát przychodzi do kapitáłu 5 razy tak wielkiégo, iak był tén, który zebráł przed 3 laty. Jakiż iest kapitáł iego?*

Źródło: „Stare polskie zadania z matematyki”, Witold Więsław, Opole 2000.

## 3.2 14 kwietnia 2011

**Zadanie 1.** Wielomian $W(x) = x^{15} + ax + b$ jest podzielny przez $x^2 - 1$ dla

☐ a) $a = 1$ i $b = 0$,
☐ b) $a = 1$ i $b = 1$,
☐ c) $a = -1$ i $b = 0$.

**Zadanie 2.** Nierówność $\sqrt{2 - |x|} < \frac{|x|}{x}$ spełniają liczby:

☐ a) $x \in (1, 2\rangle$,
☐ b) $x \in (1, \infty)$,
☐ c) $x \in \langle -1, 2\rangle$.

**Zadanie 3.** W pewnym wielokącie wypukłym liczba przekątnych jest dwa razy większa od liczby boków. Warunek ten spełnia:

☐ a) sześciokąt,
☐ b) siedmiokąt,
☐ c) ośmiokąt.

**Zadanie 4.** Niech $x = \sin\left(\frac{2011!}{2011}\pi\right)$ oraz $y = \cos\left(\frac{2011!}{2011}\pi\right)$. Zachodzi zatem:

☐ a) $x = y$,
☐ b) $x > y$,
☐ c) $x < y$.

**Zadanie 5.** Ciąg $(a_n)$ o wyrazach dodatnich jest ciągiem rosnącym. Wynika z tego, że ciąg $(b_n)$ o wyrazie ogólnym

☐ a) $b_n = \sqrt{a_n^2 + 1}$ jest rosnący,
☐ b) $b_n = a_n + 5$ jest rosnący,
☐ c) $b_n = \frac{1}{n}a_n$ jest malejący.

**Zadanie 6.** Istnieją takie niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, że mogą zachodzić następujące równości:

☐ a) $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$,
☐ b) $|\vec{u} - \vec{v}| = |\vec{u}| - |\vec{v}|$,
☐ c) $|\vec{u} - \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

**Zadanie 7.** Równanie $xy^2 = yx^2$ przedstawia na płaszczyźnie:

☐ a) dwie parabole,
☐ b) prostą,
☐ c) trzy proste.

**Zadanie 8.** $\mathrm{NWD}(65^2, 15^7) \cdot \mathrm{NWW}(15^7, 65^2)$ jest liczbą podzielną przez

☐ a) 169,
☐ b) $3^6$ i 65,
☐ c) 39.

**Zadanie 9.** Jeżeli $\frac{3a+b}{b-a} = 5$ oraz $a, b \in \mathbb{C}$, to

☐ a) $\frac{a+3b}{2a+b} = 1\frac{1}{2}$,

☐ b) $\frac{a+3b}{2a+b} = 1\frac{1}{4}$,

☐ c) $\frac{a+3b}{2a+b} > \frac{3}{2}$.

**Zadanie 10.** Proste $y = ax$ i $y = -x + b$ przecinają się w punkcie, którego obie współrzędne są ujemne. Wobec tego nie jest prawdą, że

☐ a) $a < 0$ i $b < 0$,

☐ b) $a > 0$ i $b < 0$,

☐ c) $b > 0$ i $a < -1$.

**Zadanie 11.** Jeżeli $p$ jest nieparzystą liczbą pierwszą, to liczba $p!$

☐ a) też jest nieparzysta,

☐ b) nie jest kwadratem liczby naturalnej,

☐ c) dzieli się przez liczbę $\frac{1}{2}(p-1)$.

**Zadanie 12.** W trójkącie $ABC$ poprowadzono wysokość $\overline{CD}$. Punkt $D$ dzieli podstawę $\overline{AB}$ na dwie części o długościach $|AD| = 18$ i $|DB| = 7$. Prostopadle do podstawy $\overline{AB}$ poprowadzono prostą, która dzieli trójkąt na dwie części o jednakowych polach. Odcinki, na które prosta ta dzieli podstawę trójkata pozostają w stosunku

☐ a) 5:4,

☐ b) 4:3,

☐ c) 3:2.

**Zadanie 13.** $\sqrt{5\frac{1}{4} - 3\sqrt{3}} - \sqrt{5\frac{1}{4} + 3\sqrt{3}}$ jest liczbą

☐ a) z przedziału $(-3\sqrt{2};\ 3\sqrt{2})$,

☐ b) dodatnią,

☐ c) równą 0.

**Zadanie 14.** Stosunek pola prostokąta wpisanego w koło do pola tego koła jest mniejszy od

☐ a) $\frac{2}{3}$,

☐ b) $\frac{3}{4}$,

☐ c) $\frac{4}{5}$.

**Zadanie 15.** Średnia arytmetyczna dwóch liczb dodatnich jest o 30% mniejsza niż większa z nich. Zatem średnia arytmetyczna jest większa od mniejszej z nich o:

☐ a) 70%,

☐ b) 75%,

☐ c) więcej niż 80%.

**Zadanie 16.** W półkole o średnicy długości $2R$ wpisano okrąg styczny do średnicy $AB$ w jej środku. Promień okręgu stycznego równocześnie do półokręgu $AB$, do wpisanego okręgu oraz do średnicy $AB$ jest równy

- [ ] a) $30\%R$,
- [ ] b) $\frac{1}{6}R$,
- [ ] c) $\frac{1}{4}R$.

**Zadanie 17.** Liczba $\left|\dfrac{40\cdot 2^{13}+28\cdot 8^4}{112\cdot 32^2-64^3}\right|$ jest

- [ ] a) pierwsza,
- [ ] b) parzysta,
- [ ] c) równa 3.

**Zadanie 18.** Pole trapezu równoramiennego wynosi $P$. Suma długości jego podstaw jest równa $S$. Pole kwadratu zbudowanego na przekątnej tego trapezu jest równe

- [ ] a) $\frac{4}{S^2}+\frac{S^2}{4P^2}$,
- [ ] b) $\frac{S^4+16P^2}{4S^2}$,
- [ ] c) $4S^2+\frac{4P^2}{S^2}$.

**Zadanie 19.** Gdy do roztworu wodnego soli kuchennej o stężeniu 10% dodano jeszcze $0,5$ kg soli, otrzymano roztwór o stężeniu mniejszym niż 15%. Zatem roztworu wodnego soli mogło być

- [ ] a) 9,5 kg,
- [ ] b) 9 kg,
- [ ] c) 8,5 kg.

**Zadanie 20.** Funkcja $g(x)=f(x)+f(-x)$ jest parzysta. Oznacza to, że

- [ ] a) funkcja $f$ jest parzysta,
- [ ] b) funkcja $f$ jest nieparzysta,
- [ ] c) funkcja $f$ jest dowolną funkcją.

ZADANIA OTWARTE

1. Dany jest trójkąt $ABC$, w którym kąt $BAC = 120^{\circ}$. Punkty $K$ i $L$ leżą odpowiednio na bokach $AB$ i $AC$. Niech $BKP$ i $CLQ$ będą trójkątami równobocznymi zbudowanymi na zewnątrz trójkąta $ABC$. Udowodnić, że $|PQ| \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(|AB|+|AC|)$.

2. Wykazać, że dla każdego $a \geqslant 0$ i dla każdego $n\in\mathbb{N}, n\geqslant 1$ zachodzi nierówność
$$(1+a)^n \geqslant 1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2.$$

## 3.3 12 kwietnia 2012

**Zadanie 1.** Różnica pomiędzy sumą wszystkich liczb dwucyfrowych parzystych a sumą wszystkich liczb dwucyfrowych podzielnych przez 3 wynosi:

- [ ] a) 756,
- [ ] b) 765,
- [ ] c) 567.

**Zadanie 2.** Czy istnieją funkcje $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które nie są parzyste i nie są nieparzyste, a ponadto:

- [ ] a) ich iloczyn jest niezerową funkcją parzystą a złożenie jest niezerową funkcją nieparzystą?,
- [ ] b) ich iloczyn jest niezerową funkcją nieparzystą a złożenie jest niezerową funkcją parzystą?,
- [ ] c) ich suma jest niezerową funkcją nieparzystą.

**Zadanie 3.** Wartość wyrażenia $\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{7-\sqrt{48}}$ równa się

- [ ] a) 3,
- [ ] b) 2,
- [ ] c) 1.

**Zadanie 4.** Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} 4-x & \text{dla} \quad x \geqslant 0 \\ 4+x & \text{dla} \quad x < 0 \end{cases}$. Niech $g(x) = |f(f(x))|$. Ile rozwiazań ma równanie $g(x) = 0$?

- [ ] a) mniej niż dwa,
- [ ] b) mniej niż trzy,
- [ ] c) mniej niż cztery.

**Zadanie 5.** Wszystkich par liczb całkowitych $(x, y)$ spełniających równanie $(x+y-2)(x-y-2)-5=0$ jest

- [ ] a) mniej niż 6,
- [ ] b) mniej niż 5,
- [ ] c) mniej niż 4.

**Zadanie 6.** Pierwiastki równania kwadratowego $x^2+px-q^2=0$, $q \neq 0$ oznaczamy: $x_1$ i $x_2$. Wobec tego $x_1^2x_2+x_1x_2^2$ wynosi:

- [ ] a) $p^2+2q^2$,
- [ ] b) $\frac{p^2+2q^2}{q^2}$,
- [ ] c) $p^2+4q^2$.

**Zadanie 7.** Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $f(x)$ są liczby -6 oraz 1. Wartość wyrażenia $\frac{3\cdot f(94)}{f(-24)}$ jest:

- [ ] a) liczbą parzystą,
- [ ] b) kwadratem liczby pierwszej,
- [ ] c) liczbą postaci $3k+2$, gdzie $k$ jest dowolną liczbą całkowitą.

**Zadanie 8.** Nieprawdą jest, że

☐ a) liczba $\sqrt[3]{25 - 27\sqrt[3]{2} + 9\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{2}$ jest liczbą całkowitą,

☐ b) liczba $\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} + \sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną,

☐ c) liczba $\sqrt{5\frac{1}{4} - 3\sqrt{3}} - \sqrt{5\frac{1}{4} + 3\sqrt{3}}$ jest liczbą dodatnią.

**Zadanie 9.** Wszystkich liczb pierwszych $p$ takich, że $p+1$ jest kwadratem liczby naturalnej jest

☐ a) mniej niż jedna,

☐ b) mniej niż dwie,

☐ c) mniej niz trzy.

**Zadanie 10.** Liczba $\frac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}} + \frac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}$, $n \geqslant 2$

☐ a) dla $n$ parzystego jest parzysta,

☐ b) dla $n$ parzystego jest nieparzysta,

☐ c) dla $n$ nieparzystego jest nieparzysta.

**Zadanie 11.** W trójkącie $ABC$ o polu $S$ i obwodzie $L$, punkt $P$ dzieli bok $AB$ w stosunku $|AP| : |PB| = 2 : 3$. Prosta równoległa do boku $BC$ i przechodząca przez punkt $P$ wyznacza na boku $AC$ punkt $R$. Wówczas

☐ a) obwód trójkąta $APR$ wynosi $\frac{2}{5}L$,

☐ b) trójkąt $APR$ jest podobny do trójkąta $ABC$ w skali $k = \frac{2}{3}$ ,

☐ c) pole trapezu $BCRP$ wynosi $\frac{21}{25}S$.

**Zadanie 12.** Działanie $\otimes$ jest zdefiniowane w zbiorze liczb rzeczywistych w następujący sposób: $x \otimes y = xy(x+y)$. Wtedy dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$:

☐ a) $x \otimes (-y) = y \otimes x$,

☐ b) $x \otimes y = -(y \otimes x)$,

☐ c) $(-x) \otimes y = y \otimes (-x)$.

**Zadanie 13.** Odwrotność liczby $A = \frac{2}{n-m} + (\frac{n}{m} + 2 + \frac{m}{n}) \cdot \frac{m}{m^2-n^2}$ jest

☐ a) liczbą naturalną,

☐ b) liczbą całkowitą,

☐ c) liczbą wymierną.

**Zadanie 14.** W kwadrat o boku $1 + \sqrt{2}$ wpisano trzy przystające koła, których środki leżą na jednej z przekątnych. Dwa z tych kół są styczne do boków kwadratu i zewnętrznie styczne do koła środkowego. Prawdą jest, że

☐ a) stosunek pola kwadratu do sumy pól tych kół wynosi $\frac{4(2\sqrt{2}+3)}{3\pi}$,

☐ b) obwód każdego z kół jest równy $\pi$,

☐ c) pole każdego z kół jest $< 1$.

**Zadanie 15.** Obwód prostokąta jest 10 razy większy od różnicy długości jego boków, a jego pole jest o 16 większe od różnicy kwadratów tych boków. Wynika stąd, że

☐ a) stosunek długości boków prostokąta jest równy 3:2,

☐ b) przekątna prostokąta ma długość 15,

☐ c) długość okręgu opisanego na prostokącie równa się $26\pi$.

**Zadanie 16.** Funkcja $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2+2x+m}}$:

☐ a) osiąga wartość 1 dla $m$ spełniającego równanie $2^m = \frac{1}{32}$,

☐ b) osiąga wartość największą równą $\sqrt{\frac{4}{m-1}}$,

☐ c) dla $m = 1$ osiąga wartość równą 2 tylko dla jednego argumentu.

**Zadanie 17.** Funkcja $f(x) = ||x-2|-4| + ||x-4|-2|$

☐ a) ma najmniejszą wartość równą 0,

☐ b) ma jedno miejsce zerowe,

☐ c) jest parzysta.

**Zadanie 18.** Niech ciąg $(a_n)$ będzie ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich. Zatem ciągiem geometrycznym jest ciąg określony wzorem:

☐ a) $b_n = a_n^2$,

☐ b) $b_n = 2a_n$,

☐ c) $b_n = \frac{1}{a_n}$.

**Zadanie 19.** Jeśli $\sin 100^\circ = m$ to:

☐ a) $\sin 200^\circ = 2m$,

☐ b) $\cos 200^\circ = 1 - 2m^2$,

☐ c) $\sin 200^\circ = 2m\sqrt{1-m^2}$.

**Zadanie 20.** Kąt wewnętrzny pewnego wielokąta foremnego wynosi $170^\circ$. Wówczas:

☐ a) wielokąt ten ma 594 przekątne,

☐ b) suma miar kątów wewnętrznych tego wielokąta wynosi $12240^\circ$,

☐ c) promień okręgu wpisanego jest dłuższy od boku wielokąta.

## ZADANIA OTWARTE

1. Przekątne $AC$ i $BD$ trapezu $ABCD$ $(AB||CD)$ przecinają sie w punkcie $O$. Pola trójkatów $AOB$ i $COD$ wynoszą odpowiednio: $P_1$ i $P_2$. Wyznacz pole trapezu $ABCD$.

2. Na drodze 36 m przednie koło ciągnika wykonało o 6 obrotów więcej niż tylne. Gdyby obwód każdego koła zwiększyć o 1 m, to na tej samej drodze przednie koło wykonałoby o 3 obroty więcej niż koło tylne. Oblicz obwody kół.

## 3.4 12 kwietnia 2013

**Zadanie 1.** Liczba wszystkich dzielników naturalnych liczby 2014 jest liczbą:

☐ a) parzystą,
☐ b) podzielną przez 4,
☐ c) podzielną przez 8.

**Zadanie 2.** Jeżeli $x + y = 1$, to

☐ a) $x^2 + y^2 \geqslant \frac{1}{2}$,
☐ b) $x^3 + y^3 \geqslant \frac{1}{4}$,
☐ c) $x - y \geqslant 0$.

**Zadanie 3.** Funkcje $f$i $g$ są funkcjami nieparzystymi. Zatem:

☐ a) funkcja $h(x) = f(x) + g(x)$ jest parzysta,
☐ b) funkcja $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ jest parzysta,
☐ c) funkcja $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ jest parzysta.

**Zadanie 4.** Suma kątów wewnętrznych pewnego wielokąta wypukłego wynosi $1800^o$. Zatem ma on:

☐ a) więcej niż 50 przekątnych,
☐ b) więcej niż 60 przekątnych,
☐ c) więcej niż 70 przekątnych.

**Zadanie 5.** Liczb naturalnych $n$ dla których liczba $n^4 + 1$ jest liczbą pierwszą jest:

☐ a) nieskończenie wiele,
☐ b) mniej niż cztery,
☐ c) mniej niż trzy.

**Zadanie 6.** Wykres funkcji $f(x) = ||x| - 1| + ||x| - 2|$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, ma z osią odciętych:

☐ a) jeden punkt wspólny,
☐ b) dwa punkty wspólne,
☐ c) trzy punkty wspólne.

**Zadanie 7.** Układ równań $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 23 \\ x + 2y + 4z = 22 \end{cases}$ :

☐ a) ma dokładnie jedno rozwiązanie,
☐ b) ma nieskończenie wiele rozwiązań,
☐ c) jest sprzeczny.

**Zadanie 8.** Wielokąt wypukły ma 152 przekątne. Suma miar kątów wewnętrznych tego wielokąta jest:

☐ a) większa niż $3000°$,
☐ b) mniejsza niż $4000°$,
☐ c) równa $3600°$.

**Zadanie 9.** Istnieje trójkąt, którego długości wysokości wynoszą:

- [ ] a) 1, 2, 3,
- [ ] b) 2, 3, 4,
- [ ] c) 4, 5, 6.

**Zadanie 10.** Liczba $p$ jest liczbą pierwszą większą niż 3. Zatem $p^2 - 1$ dzieli się przez:

- [ ] a) 3,
- [ ] b) 8,
- [ ] c) 24.

**Zadanie 11.** Liczby naturalne od 1 do 101 zapisane po kolei tworzą w ten sposób liczbę $a$. Prawdą jest, że:

- [ ] a) $a$ jest złożona,
- [ ] b) $a$ jest podzielna przez 3,
- [ ] c) $a$ jest kwadratem liczby naturalnej.

**Zadanie 12.** Dany jest wielomian stopnia piątego o współczynnikach nieparzystych. Każdy pierwiastek całkowity tego wielomianu jest liczbą:

- [ ] a) parzystą,
- [ ] b) nieparzystą,
- [ ] c) będącą dzielnikiem wyrazu wolnego.

**Zadanie 13.** Dane są trzy zdania $p, q, r$. Prawdziwe jest zdanie:

- [ ] a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$,
- [ ] b) $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow ((\sim p) \wedge (\sim q))$,
- [ ] c) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

**Zadanie 14.** W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 2 i 3 dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na dwa odcinki, z których jeden ma długość:

- [ ] a) $\frac{2\sqrt{13}}{5}$,
- [ ] b) $\frac{3}{5}\sqrt{13}$,
- [ ] c) mniejszą niż 1.

**Zadanie 15.** Równanie $3x^2 - 7xy + 2y^2 = 0$ opisuje na płaszczyźnie:

- [ ] a) parabolę,
- [ ] b) punkt,
- [ ] c) dwie proste.

**Zadanie 16.** W okrąg, którego promień ma długość $a$ wpisano prostokąt. Środki kolejnych boków prostokąta połączono odcinkami. Obwód otrzymanego czworokąta jest:

- [ ] a) większy niż $4a$,
- [ ] b) większy niż $5a$,
- [ ] c) większy niż $6a$.

**Zadanie 17.** Ojciec i matka mają razem 70 lat. Ojciec ma dwa razy tyle lat, ile matka miała wtedy, kiedy on miał tyle lat, ile ona ma teraz. Zatem:

- [ ] a) ojciec jest o 10 lat starszy od matki,
- [ ] b) iloczyn ich wieku to 1200,
- [ ] c) za 5 lat ojciec będzie miał 45 lat.

**Zadanie 18.** Liczba $\frac{\sin 1\cdot\cos 1\cdot\cos 2\cdot\cos 4\cdot\cos 8\cdot\cos 16}{\sin 32}$ jest:

- [ ] a) niewymierna,
- [ ] b) wymierna,
- [ ] c) mniejsza niż 0,03.

**Zadanie 19.** Dla pewnego ciągu arytmetycznego $(a_n)$ zachodzi równość $2S_{2n} = S_{4n}$, $n \in \mathbb{N}_+$. Wynika z tego, że:

- [ ] a) ciąg $(a_n)$ jest stały,
- [ ] b) taki ciąg nie istnieje,
- [ ] c) ciąg $(a_n)$ jest malejący.

**Zadanie 20.** Jeżeli $a, b, c$ są liczbami całkowitymi nieparzystymi, to równanie $ax^2 + bx + c = 0$:

- [ ] a) ma dwa pierwiastki wymierne,
- [ ] b) nie ma pierwiastków wymiernych,
- [ ] c) nie ma pierwiastków w zbiorze liczb rzeczywistych.

## ZADANIA OTWARTE

1. Jedna beczka zawiera mieszaninę spirytusu z wodą w stosunku 2:3, a druga w stosunku 3:7. Ile wiader należy wziąć z każdej beczki, żeby otrzymać 12 wiader mieszaniny, w której stosunek spirytusu do wody byłby równy 3:5?

2. Wykaż, że jeśli $a > b$ i $a \cdot b = 1$, to

$$\left(\frac{a^2 + b^2}{2a - 2b}\right)^2 \geqslant 2.$$

## 3.5 11 kwietnia 2014

**Zadanie 1.** Liczba wszystkich dzielników naturalnych liczby 2014 jest liczbą:

a) parzystą,

b) podzielną przez 4,

c) podzielną przez 8.

**Zadanie 2.** Jeżeli $x + y = 1$, to:

a) $x^2 + y^2 \geqslant \frac{1}{2}$,

b) $x^3 + y^3 \geqslant \frac{1}{4}$,

c) $x - y \geqslant 0$.

**Zadanie 3.** Funkcje $f$ i $g$ są funkcjami nieparzystymi. Zatem:

a) funkcja $h(x) = f(x) + g(x)$ jest parzysta,

b) funkcja $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ jest parzysta,

c) funkcja $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ jest parzysta.

**Zadanie 4.** Suma kątów wewnętrznych pewnego wielokąta wypukłego wynosi $1800°$. Zatem ma on:

a) więcej niż 50 przekątnych,

b) więcej niż 60 przekątnych,

c) więcej niż 70 przekątnych.

**Zadanie 5.** Liczb naturalnych $n$ dla których liczba $n^4 + 4$ jest liczbą pierwszą jest:

a) nieskończenie wiele,

b) mniej niż cztery,

c) mniej niż trzy.

**Zadanie 6.** Wykres funkcji $f(x) = ||x| - 1| + ||x| - 2|$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, ma z osią odciętych:

a) jeden punkt wspólny,

b) dwa punkty wspólne,

c) trzy punkty wspólne.

**Zadanie 7.** Suma cyfr liczby $999999^2$ jest:

a) liczbą nieparzystą,

b) liczbą podzielną przez 6,

c) liczbą mniejszą niż 100.

**Zadanie 8.** Istnieje liczba złożona, której wszystkie dzielniki większe od jedności, przy dzieleniu przez trzy dają resztę:

a) 0,

b) 1,

c) 2.

**Zadanie 9.** Najmniejszą wartością funkcji $f(x) = \sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}$ jest:

- [ ] a) 0,
- [ ] b) 1,
- [ ] c) 2.

**Zadanie 10.** Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dla wszystkich liczb $x, y \in \mathbb{R}$ spełnia równanie $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Prawdą jest, że:

- [ ] a) $f(0) = 0$,
- [ ] b) $f(0) = 1$,
- [ ] c) $f(2) = 4$, jeśli $f(1) = 2$.

**Zadanie 11.** Liczby $a, b, c, d$, $(a < b < c < d)$, są czterema kolejnymi najmniejszymi liczbami nieparzystymi, których suma jest podzielna przez 15. Prawdą jest, że:

- [ ] a) $a + b + c + d = 5!$,
- [ ] b) $b$ jest liczbą pierwszą,
- [ ] c) $c \cdot d > 1000$.

**Zadanie 12.** Niech $a$ i $b$ oznaczają długości dwóch boków trójkąta o polu $P$. Zatem:

- [ ] a) $P \leqslant \frac{a^2+b^2}{4}$,
- [ ] b) $P \leqslant \frac{a^2+b^2}{3}$,
- [ ] c) $P \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$.

**Zadanie 13.** Liczb $n$-cyfrowych o sumie cyfr równej 2 jest:

- [ ] a) $n!$,
- [ ] b) $\frac{n(n+1)}{2}$,
- [ ] c) $n$.

**Zadanie 14.** Dwa okręgi przecinają się w punktach $A$ i $B$. Odcinki $AC$ i $AD$ są średnicami tych okręgów. Wynika z tego, że:

- [ ] a) punkty $C$, $B$ i $D$ są współliniowe,
- [ ] b) trójkąt $ADC$ jest trójkątem prostokątnym,
- [ ] c) odcinek $AB$ jest prostopadły do odcinka $CD$.

**Zadanie 15.** Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości $a$ i $2a$. Długość promienia okręgu stycznego do obu przyprostokątnych, o środku leżącym na przeciwprostokątnej jest:

- [ ] a) mniejsza niż $a$,
- [ ] b) mniejsza niż $\frac{3}{4}a$,
- [ ] c) mniejsza niż $\frac{1}{2}a$.

**Zadanie 16.** Podstawy trapezu mają długości 8 i 4. Długość odcinka równoległego do nich i dzielącego trapez na dwie figury o równych polach wynosi:

☐ a) 6,
☐ b) $2\sqrt{10}$,
☐ c) $\frac{1}{2}\sqrt{160}$.

**Zadanie 17.** Wśród liczb 41, 401, 4001, 40001, 400001, 4000001, 40000001, 400000001, kwadratów liczby naturalnej jest:

☐ a) mniej niż 2,
☐ b) mniej niż 3,
☐ c) mniej niż 4.

**Zadanie 18.** W równoległoboku $ABCD$ punkty $P$ i $Q$ są odpowiednio środkami boków $AB$ i $AD$. Prawdą jest, że:

☐ a) $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{CQ} - 2\overrightarrow{CP})$,
☐ b) $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{CP} - 2\overrightarrow{CQ})$,
☐ c) $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CQ}$.

**Zadanie 19.** W trapezie równoramiennym $ABCD$ wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego ma długość $\sqrt[3]{2}$ i dzieli dłuższą podstawę na odcinki, z których dłuższy ma długość $\sqrt[3]{4}$. Pole tego trapezu:

☐ a) jest większe niż 2,
☐ b) jest większe niż 3,
☐ c) jest większe niż 4,

**Zadanie 20.** Liczba $\frac{1}{\log_2 2014!} + \frac{1}{\log_3 2014!} + \ldots + \frac{1}{\log_{2014} 2014!}$ jest:

☐ a) równa 2014,
☐ b) liczbą parzystą,
☐ c) większa niż $\frac{1}{2014}$.

## ZADANIA OTWARTE

1. W trójkącie prostokątnym $ABC$, gdzie kąt przy wierzchołku $C$ ma miarę $90°$, wybrano punkt $P$, dla którego trójkąty $PAB$, $PBC$ i $PCA$ mają równe pola. Oblicz odległość punktu $P$ od wierzchołka $C$ wiedząc, że suma kwadratów odległości tego punktu od wierzchołków $A$ i $B$ jest równa $m$.

2. Oblicz $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{2013\cdot 2014}$.

## 3.6 10 kwietnia 2015

**Zadanie 1.** Kwadratem liczby całkowitej może być:

- a) suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych,
- b) suma kwadratów trzech kolejnych liczb parzystych,
- c) suma kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych.

**Zadanie 2.** Funkcja liniowa $f$ spełnia warunki $f(2^{2014}) = 2^{2015}$ i $f(2^{2015}) = 2^{2016}$. Prawdą jest, że:

- a) $f(2^{2016}) = 2^{2017}$,
- b) $f(0) = 2$,
- c) $f(f(f(2))) = 16$.

**Zadanie 3.** Wyrazem rozwinięcia dwumianu $\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^{12}$, w którym nie występuje $x$ jest:

- a) $\binom{12}{9}$
- b) $\binom{12}{8}$
- c) 495.

**Zadanie 4.** Liczby naturalne $x$ i $y$ są rozwiązaniem równania $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{xy}$. Zatem:

- a) $x^2 + y^2 = 13$,
- b) $x^3 + y^3 = 35$,
- c) $x^4 + y^4 = 98$.

**Zadanie 5.** Równanie $x^{2016} - 2015x - 1 = 0$ ma:

- a) dokładnie 2016 różnych pierwiastków,
- b) dwa pierwiastki całkowite,
- c) dwa pierwiastki niewymierne.

**Zadanie 6.** Granicą ciągu $a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ jest:

- a) liczba naturalna ,
- b) liczba całkowita,
- c) liczba wymierna.

**Zadanie 7.** Istnieje trójkąt, którego dwusieczne przecinają się pod kątem:

- a) $70^\circ$,
- b) $80^\circ$,
- c) $90^\circ$.

**Zadanie 8.** Zegar wskazuje godzinę 16.00. Załóżmy, że wskazówki zegara poruszają się ruchem ciągłym (bez skoków). Wskazówka minutowa pokryje się ze wskazówką godzinową po upływie:

- a) dokładnie 21 minut i 49 sekund,
- b) ponad 21 minut i 49 sekund,
- c) prawie 21 minut i 49 sekund.

**Zadanie 9.** Dane jest wyrażenie $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}$. Jeśli $n$ zwiększymy dwukrotnie to wartość tego wyrażenia:

- a) wzrośnie dwukrotnie,
- b) wzrośnie $2^n$ razy,
- c) wzrośnie $n^2$ razy.

**Zadanie 10.** Prawdą jest, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a$, $b$:

- a) $|a+b|+|a-b|\geqslant |a|+|b|$,
- b) $|a+b|\leqslant |a|+|b|$,
- c) $||a|-|b||\leqslant |a-b|$.

**Zadanie 11.** Rozwiązaniem równania $|x^2+2x+5|=|x^2+3x+6|$ jest liczba:

- a) $-1$,
- b) $\frac{-5-\sqrt{33}}{4}$,
- c) $\frac{5+\sqrt{33}}{4}$.

**Zadanie 12.** Pięciocyfrowych liczb naturalnych, których suma cyfr po podzieleniu przez 45 daje resztę trzy jest:

- a) więcej niż 10,
- b) więcej niż 15,
- c) więcej niż 20.

**Zadanie 13.** Jeśli $x+y=1$, to największą wartością wyrażenia $4xy$ jest:

- a) 0,
- b) 2,
- c) 1.

**Zadanie 14.** Pole ośmiokąta foremnego o boku długości $a$ jest:

- a) większe od pola kwadratu o boku $2a$,
- b) większe od pola koła o promieniu $\frac{3}{2}a$,
- c) równe $(2+2\sqrt{2})a^2$.

**Zadanie 15.** Wiadomo, że $a-\frac{1}{a}=3$. Zatem:

- a) $a^2+\frac{1}{a^2}=11$,
- b) $a^3-\frac{1}{a^3}=33$,
- c) $a^5-\frac{1}{a^5}=55$.

**Zadanie 16.** Wielomian $W(x)=x^n-nx^{n-1}+n-1$ jest podzielny przez:

- a) $x-n$,
- b) $x-1$,
- c) $x+1$.

**Zadanie 17.** Liczba $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}}$ jest równa:

- [ ] a) $\sqrt[3]{12}+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{9}$,
- [ ] b) $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{12}$,
- [ ] c) $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{12}$.

**Zadanie 18.** Kwadrat podzielono na dwa prostokąty, których stosunek obwodów wynosi $5:4$. Stosunek pól tych prostokątów jest:

- [ ] a) równy $\frac{25}{16}$,
- [ ] b) większy niż 2,
- [ ] c) mniejszy niż 2.

**Zadanie 19.** Liczby $a$ i $b$ są dwoma różnymi pierwiastkami równania $x^2+ax+b=0$. Wynika z tego, że:

- [ ] a) $a^2+b^2=5$,
- [ ] b) $a^3+b^3=-7$,
- [ ] c) $a^4+b^4=17$.

**Zadanie 20.** Ciąg arytmetyczny składa się z trzech wyrazów dodatnich i ciąg geometryczny składa się z trzech wyrazów dodatnich. Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy trzeciemu wyrazowi ciągu geometrycznego, a pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy trzeciemu wyrazowi ciągu arytmetycznego. Zatem:

- [ ] a) suma wyrazów ciągu arytmetycznego jest mniejsza od sumy wyrazów ciągu geometrycznego,
- [ ] b) suma wyrazów ciągu arytmetycznego jest większa lub równa od sumy wyrazów ciągu geometrycznego,
- [ ] c) sumy tych ciągów są zawsze równe.

## ZADANIA OTWARTE

1. Ze środkowych trójkąta o polu $S$ zbudowano trójkąt. Wyznacz pole tego trójkąta.
2. Ile jest liczb pierwszych $p$ takich, że $p+6$, $p+12$, $p+18$, $p+24$, $p+30$ są jednocześnie liczbami pierwszymi? (Odpowiedź uzasadnij).

## 3.7 8 kwietnia 2016

**Zadanie 1.** Trzecią cyfrą po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby $\pi$ jest:

- [ ] a) 7,
- [ ] b) 8,
- [ ] c) 9.

**Zadanie 2.** Do przedziału $(50, 60)$ należy:

- [ ] a) mniej niż pięć liczb pierwszych,
- [ ] b) mniej niż cztery liczby pierwsze,
- [ ] c) mniej niż trzy liczby pierwsze.

**Zadanie 3.** Rozwinięcie dwumianu $\left(\sqrt[6]{2016} + \sqrt[9]{2016}\right)^{21}$ zawiera:

- [ ] a) mniej niż pięć wyrazów wymiernych,
- [ ] b) mniej niż cztery wyrazy wymierne,
- [ ] c) mniej niż trzy wyrazy wymierne.

**Zadanie 4.** Różnym literom odpowiadają różne cyfry. Jeśli $P \cdot W \cdot S \cdot Z = 2016$, to:

- [ ] a) $P + W + S + Z > 25$,
- [ ] b) $P + W + S + Z > 28$,
- [ ] c) $P + W + S + Z > 22$.

**Zadanie 5.** Czworo studentów: $P$, $W$, $S$, $Z$ wypowiedziało zdania

$P$ : $W$, $S$ i $Z$ to mężczyźni,
$W$ : $P$, $S$ i $Z$ to kobiety,
$S$ : $P$ i $W$ kłamią,
$Z$ : $P$, $W$ i $S$ mówią prawdę.

Prawdą jest, że:

- [ ] a) wszyscy kłamią,
- [ ] b) jeden student mówi prawdę,
- [ ] c) wszyscy mówią prawdę.

**Zadanie 6.** Jeżeli liczbę dwucyfrową podzielimy przez sumę jej cyfr, to otrzymamy 6 i resztę 3. Jeżeli podzielimy tę liczbę przez sumę cyfr powiększoną o 2, to otrzymamy 5 i resztę 5. Liczba ta jest:

- [ ] a) większa od 60 ,
- [ ] b) mniejsza od 90,
- [ ] c) parzysta.

**Zadanie 7.** Dwa boki trójkąta o polu $S = \frac{2}{5}ab$ mają długości $a$ i $b$. Prawdą jest, że:

- [ ] a) obwód tego trójkąta jest równy $\frac{6}{5}ab$,
- [ ] b) trzeci bok trójkąta ma długość $\sqrt{(a-b)^2 + \frac{4}{5}ab}$,
- [ ] c) trzeci bok trójkąta ma długość $\sqrt{(a-b)^2 + ab}$.

**Zadanie 8.** Liczba $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{6-\sqrt{32}}$ jest liczbą:

- [ ] a) wymierną,
- [ ] b) całkowitą,
- [ ] c) pierwszą.

**Zadanie 9.** Liczba $2016^{2015}+2016^{2016}+2016^{2017}+2016^{2018}$ jest podzielna przez:

- [ ] a) 3,
- [ ] b) 7,
- [ ] c) 2017.

**Zadanie 10.** Odległości środka okręgu wpisanego w trapez prostokątny od końców ramienia nieprostopadłego do podstaw są równe 5 i 10. Prawdą jest, że:

- [ ] a) pole trapezu jest równe 90,
- [ ] b) obwód trapezu jest równy $18\sqrt{5}$,
- [ ] c) średnica okręgu ma długość 10.

**Zadanie 11.** Równanie $x^2+ax+b=0$ ma dwa różne pierwiastki, którymi są liczby $a$ i $b$. Zatem:

- [ ] a) $ab<0$,
- [ ] b) $ab<-1$,
- [ ] c) $ab<-2$.

**Zadanie 12.** Dla każdej liczby naturalnej $n$ liczba $n^5-n$ jest:

- [ ] a) podzielna przez 2,
- [ ] b) podzielna przez 3,
- [ ] c) podzielna przez 5.

**Zadanie 13.** Moneta o średnicy 1 cm toczy się po obwodzie sześciokąta foremnego o boku 1 cm tak długo, aż powróci do położenia początkowego. Droga, którą zakreśli środek monety ma długość:

- [ ] a) większą niż 9 cm,
- [ ] b) większą niż 10 cm,
- [ ] c) większą niż 11 cm.

**Zadanie 14.** Równanie $y^2-y=x^2-x$ opisuje na płaszczyźnie:

- [ ] a) okrąg,
- [ ] b) dwie proste,
- [ ] c) dwie proste prostopadłe.

**Zadanie 15.** Dla każdej liczby rzeczywistej $x$ prawdziwa jest nierówność:

- [ ] a) $x^4-x^3+2x^2-x+1>0$,
- [ ] b) $x^4-x^3+2x^2-x+100>0$,
- [ ] c) $x^4-x^3+2x^2-x+2016>0$.

**Zadanie 16.** Polem rombu o obwodzie 16 cm nie może być:

☐ a) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$,
☐ b) $4\pi$,
☐ c) 18.

**Zadanie 17.** Jeśli wiadomo, że $x + \frac{1}{x}$ jest liczbą całkowitą, to prawdą jest, że:

☐ a) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ jest liczbą całkowitą,
☐ b) $x^3 + \frac{1}{x^3}$ jest liczbą całkowitą,
☐ c) $x^4 + \frac{1}{x^4}$ jest liczbą całkowitą.

**Zadanie 18.** Dla pewnego ciągu arytmetycznego $(a_n)$ zachodzi równość $2S_{2n} = S_{4n}$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Wynika z tego, że:

☐ a) ciąg $(a_n)$ jest rosnący,
☐ b) taki ciąg nie istnieje,
☐ c) ciąg $(a_n)$ jest stały.

**Zadanie 19.** Funkcja $f$ spełnia równanie $x \cdot f(x) + f(\frac{1}{x}) = 1 + f(x)$, dla $x \neq 0$. Zatem:

☐ a) $f(2) > 3$,
☐ b) $f(2) < 4$,
☐ c) $f(2) < 0$.

**Zadanie 20.** Pewna funkcja liniowa $f$ spełnia warunek $f(1000) + f(1015) = 3$. Wtedy wartość wyrażenia $f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(2015)$ jest:

☐ a) większa niż 2000,
☐ b) większa niż 3000,
☐ c) większa niż 4000.

## ZADANIA OTWARTE

1. Oblicz sumę $\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5} + \ldots + \frac{1}{98\cdot99\cdot100}$ .
2. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze $p$, dla których każda z liczb $p^2+2$, $p^3+2$, $p^4+2$ jest liczbą pierwszą. Przedstaw odpowiednie obliczenia lub pełny tok rozumowania.

## 3.8 30 marca 2017

**Zadanie 1.** Dane są dwa zdania:

$p$ - suma dwóch liczb niewymiernych jest liczbą niewymierną,

$q$ - kwadrat liczby niewymiernej jest liczbą wymierną.

Prawdziwe jest wyrażenie:

☐ a) $p \Rightarrow q$,

☐ b) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$,

☐ c) $p \vee (q \Rightarrow p)$.

**Zadanie 2.** Równanie $2x^2 = xy + y^2$ opisuje na płaszczyźnie:

☐ a) hiperbolę,

☐ b) parabolę,

☐ c) punkt.

**Zadanie 3.** Równanie $x^2 + px + q = 0$ ma dwa różne od zera pierwiastki, którymi są liczby $p$ i $q$. Prawdą jest, że:

☐ a) $p + q = 3$,

☐ b) $p + q = -1$,

☐ c) $p - q = 3$.

**Zadanie 4.** Liczba $13^n + 6$ jest podzielna przez 7 dla:

☐ a) $n = 2016$,

☐ b) $n = 2017$,

☐ c) $n = 2018$.

**Zadanie 5.** Z cyfr 1, 2, 3, 7, 8, 9 utworzono wszystkie możliwe liczby dwucyfrowe o różnych cyfrach. Suma tych liczb jest:

☐ a) większa niż 1700,

☐ b) większa niż 1600,

☐ c) większa niż 1500.

**Zadanie 6.** Prawdą jest, że:

☐ a) $\sin 10° \cdot \sin 30° \cdot \sin 50° \cdot \sin 70° = \frac{1}{16}$,

☐ b) $\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$,

☐ c) $\cos \frac{4}{9}\pi \cdot \cos \frac{1}{9}\pi \cdot \cos \frac{2}{9}\pi = \frac{1}{9}$.

**Zadanie 7.** Istnieje takie $a \in \mathbb{R}$, dla którego równanie $|x + 1| + |x - 1| = a$ ma:

☐ a) dokładnie jeden pierwiastek,

☐ b) dokładnie dwa pierwiastki,

☐ c) nieskończenie wiele pierwiastków.

**Zadanie 8.** Ciąg $(a_n)$ jest zbieżny do zera. Zatem ciąg $(n \cdot a_n)$:

☐ a) może być zbieżny do zera,

☐ b) może być rozbieżny do nieskończoności,

☐ c) może być zbieżny do 2017.

**Zadanie 9.** Każdą z liczb ze zbioru $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ mnożymy przez każdą z liczb ze zbioru $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Suma wszystkich pięćdziesięciu iloczynów otrzymanych w powyższy sposób jest:

☐ a) większa niż 1000,
☐ b) większa niż 900,
☐ c) większa niż 800.

**Zadanie 10.** Pociąg o długości 100m jedzie przez tunel długości 100m z prędkością $100\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Na pokonanie tego tunelu pociąg potrzebuje:

☐ a) więcej niż 3s,
☐ b) więcej niż 4s,
☐ c) więcej niż 5s.

**Zadanie 11.** Liczb pierwszych $p$, dla których $p+27$ jest sześcianem liczby naturalnej jest:

☐ a) więcej niż 10,
☐ b) więcej niż 27,
☐ c) nieskończenie wiele.

**Zadanie 12.** Piszemy jednym ciągiem kolejne liczby naturalne $12345678910111213\ldots$. Jaka cyfra wypadnie na 2017 miejscu:

☐ a) 5,
☐ b) 6,
☐ c) 7.

**Zadanie 13.** Liczbą pierwszą jest liczba:

☐ a) 201720172017,
☐ b) 201920182017,
☐ c) 329329.

**Zadanie 14.** Liczby dodatnie $x$ i $y$ spełniają warunek $x^{2106}+y^{2016} = x^{2018}+y^{2018}$. Prawdą jest, że:

☐ a) $x^2 + y^2 \leqslant 2$,
☐ b) $x^2 + y^2 > 2$,
☐ c) $x^2 + y^2 > 2017$.

**Zadanie 15.** Suma pięciu różnych liczb naturalnych jest równa 20, a iloczyn 420. Suma kwadratów tych liczb jest:

☐ a) większa niż 100,
☐ b) mniejsza niż 100,
☐ c) równa 100.

**Zadanie 16.** Zaprzeczeniem zdania: „Każda liczba rzeczywista jest dodatnia”, jest zdanie:

☐ a) „Każda liczba rzeczywista jest ujemna”,
☐ b) „Każda liczba rzeczywista jest nieujemna”,
☐ c) „Istnieje liczba rzeczywista dodatnia”.

**Zadanie 17.** Do dwóch okręgów przecinających się w punktach $P$ i $Q$ poprowadzono wspólną styczną. Punkty $A$ i $B$ są punktami styczności. Suma miar kątów $APB$ i $AQB$ jest:

☐ a) większa niż $180°$,
☐ b) większa niż $190°$,
☐ c) większa niż $200°$.

**Zadanie 18.** Z miasta $A$ do miasta $B$ jest 660km. Z miasta $A$ do miasta $C$ jest 310km, z miasta $C$ do miasta $D$ jest 200km, zaś z miasta $D$ do miasta $B$ jest 150km. Odległość od miasta $B$ do miasta $C$ jest:

☐ a) większa niż 300km,
☐ b) większa niż 350km,
☐ c) większa niż 400km.

**Zadanie 19.** Pole trójkąta, którego środkowe mają długości $9,\ 12,\ 15$ jest:

☐ a) większe niż 65,
☐ b) większe niż 70,
☐ c) większe niż 75.

**Zadanie 20.** Na bokach $n$-kąta foremnego zbudowano na zewnątrz kwadraty. Wiadomo, że drugi $2n$-kąt, którego wierzchołkami są wierzchołki tych kwadratów nie będące wierzchołkami danego $n$-kąta, jest także foremny. Zatem:

☐ a) $n = 12$,
☐ b) $n = 18$,
☐ c) $n = 2017$.

## ZADANIA OTWARTE

1. Kwadrat $ABCD$ wpisany jest w okrąg o promieniu 1. Wykaż, że dla dowolnego punktu $P$ na okręgu

$$|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2 = 8 \; .$$

2. Wykaż, że jeżeli $x$ i $y$ są takimi liczbami rzeczywistymi, że $x > y$ i $xy = 1$, to

$$x^2 + y^2 \geqslant 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y \; .$$

## 3.9 13 kwietnia 2018

**Zadanie 1.** Dane są dwie różne liczby pierwsze $p$ i $q$. Liczbą niewymierną jest:

- a) $\sqrt{p+q}$ ,
- b) $\sqrt{3p+q}$ ,
- c) $p\sqrt{q}+q\sqrt{p}$ .

**Zadanie 2.** Liczba NWD$(6^{2018},\ 5^{2018})\cdot$NWW$(6^{2018},\ 5^{2018})$:

- a) ma parzystą liczbę dzielników,
- b) ma więcej niż $8\cdot 10^9$ dzielników,
- c) jest podzielna przez 2018.

**Zadanie 3.** Liczba $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}$

- a) jest naturalna,
- b) jest parzysta,
- c) jest większa niż $2\sqrt{3}$.

**Zadanie 4.** Niech $A=2018^{\log 2017}$ oraz $B=2017^{\log 2018}$. Wtedy:

- a) $A>B$,
- b) $\frac{A}{B}=1$,
- c) $|A-B|>2016$.

**Zadanie 5.** Niech $g(x)=x^2+2x+1$ i $f(x)=g(g(x))$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$. Wówczas:

- a) zbiorem wartości funkcji $g$ jest przedział $\langle 0,+\infty)$,
- b) zbiorem wartości funkcji $f$ jest przedział $\langle 1,+\infty)$,
- c) funkcja $f$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe.

**Zadanie 6.** W trapez równoramienny o podstawach $a$ i $9a$ wpisano okrąg. Wówczas:

- a) ramię trapezu ma długość $5a$,
- b) przekątna trapezu ma długość $6a$,
- c) stosunek obwodu trapezu do średnicy okręgu jest równy $20:3$.

**Zadanie 7.** $n$-ta suma częściowa ciągu $(a_n)$ wyraża się wzorem $S_n=3n^2$. Wobec tego:

- a) $a_{2018}=12105$,
- b) $a_3-a_2=a_6-a_5$,
- c) $\dfrac{a_4}{a_3}=\dfrac{5}{7}$.

**Zadanie 8.** Istnieje takie $m\in\mathbb{R}$, że zbiór rozwiązań nierówności $|x|+m<\frac{1}{|x|}$:

- a) jest zbiorem pustym,
- b) jest zbiorem $\mathbb{R}\setminus\{0\}$,
- c) jest zawarty w przedziale $\left(-\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right)$.

**Zadanie 9.** Istnieje taka liczba $a \in \mathbb{R}$, że układ równań

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2ax = 0 \\ x^2 + y^2 - 2ay = 0 \end{cases} :$$

- [ ] a) ma dwa rozwiązania,
- [ ] b) ma jedno rozwiązanie,
- [ ] c) nie ma rozwiązania.

**Zadanie 10.** Można tak dobrać liczby $a, b, c, d$, aby zbiór rozwiązań nierówności

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) < 0$$

był:

- [ ] a) zbiorem pustym,
- [ ] b) zbiorem nieograniczonym,
- [ ] c) przedziałem.

**Zadanie 11.** Jeżeli pole pięciokąta opisanego na okręgu o promieniu 1 jest równe 16, to długości jego boków nie są kolejnymi liczbami:

- [ ] a) naturalnymi,
- [ ] b) nieparzystymi,
- [ ] c) parzystymi.

**Zadanie 12.** Niech $a = \sqrt{7 - \sqrt{48}} + \sqrt{5 - \sqrt{24}} + \sqrt{3 - \sqrt{8}}$. Zatem:

- [ ] a) $a > 0$,
- [ ] b) $a > 1$,
- [ ] c) $a > 2$.

**Zadanie 13.** Nierówność $\sqrt{2}|x^3 - 7x + 6| + 3|x^6 - 1| \leqslant 0$:

- [ ] a) nie ma rozwiązania,
- [ ] b) ma mniej niż sześć rozwiązań,
- [ ] c) ma rozwiązanie będące liczbą pierwszą.

**Zadanie 14.** Równanie $xy + x^2 + y^2 + 2x - 2y + 4 = 0$ spełnia:

- [ ] a) dokładnie jedna para liczb rzeczywistych,
- [ ] b) więcej niż jedna para liczb rzeczywistych,
- [ ] c) mniej niż trzy pary liczb rzeczywistych.

**Zadanie 15.** Niech $a, b, c, d$ będą dodatnimi liczbami całkowitymi spełniającymi równanie $ab + bc + cd + da = 2018$. Wynika stąd, że:

- [ ] a) $a + b + c + d > 1000$,
- [ ] b) $a + b + c + d > 1010$,
- [ ] c) $a + b + c + d > 1020$.

**Zadanie 16.** Pierwiastki równania $x^2 - 9mx + 20 = 0$ są cyframi pewnej liczby dwucyfrowej. Zatem:

- [ ] a) $m > \frac{9}{8}$,
- [ ] b) $m > \frac{11}{8}$,
- [ ] c) $m > \frac{13}{8}$.

**Zadanie 17.** Liczba naturalna $a$ przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2, a przy dzieleniu przez 35 daje resztę $r$. Zatem:

- [ ] a) $r$ jest liczbą pierwszą,
- [ ] b) $r$ jest liczbą parzystą,
- [ ] c) $r$ jest liczbą jednocyfrową.

**Zadanie 18.** Funkcja liniowa określona dla wszystkich liczb rzeczywistych spełnia warunek $f(2018) + f(1) = 2$. Wartość wyrażenia $f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(2018) + f(2019)$ jest:

- [ ] a) liczbą parzystą,
- [ ] b) liczbą pierwszą,
- [ ] c) liczbą większą od 2000.

**Zadanie 19.** Ciąg $(a_n)$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $q$ i sumie wyrazów $S$, zaś ciąg $(b_n)$ określony jest wzorem $b_n = a_n^2$. Wynika stąd, że suma ciągu $(b_n)$:

- [ ] a) istnieje,
- [ ] b) jest równa $S^2$,
- [ ] c) jest równa $\dfrac{a_1 \cdot S}{1+q}$.

**Zadanie 20.** W rozwinięciu dwumianu $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{2})^6$:

- [ ] a) nie występują składniki wymierne,
- [ ] b) występuje dokładnie jeden składnik wymierny,
- [ ] c) występują dokładnie dwa składniki wymierne.

## ZADANIA OTWARTE

1. Dany jest wielomian $W(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$ o współczynnikach rzeczywistych, taki, że $W(1) = 1,\ W(2) = 2,\ W(3) = 3, W(4) = 4$. Oblicz $W(5)$.

2. Wykaż, że dla nieujemnych liczb rzeczywistych $x,\ y,\ z$ spełniona jest nierówność

$$(x+y+z)^2 \geqslant 3\left(x\sqrt{yz} + y\sqrt{xz} + z\sqrt{xy}\right) .$$

### 3.10 5 kwietnia 2019

**Zadanie 1.** Liczba $2019^{2015} + 2019^{2016} + 2019^{2017} + 2019^{2018}$ jest podzielna przez:

☐ a) $2020$,
☐ b) $2019^2 + 1$,
☐ c) $2019^2 - 1$.

**Zadanie 2.** Równanie $4x^3 + x^2 + x + \frac{1}{3} = 0$ ma:

☐ a) dwa różne rozwiązania,
☐ b) jedno rozwiązanie wymierne,
☐ c) trzy rozwiązania niewymierne.

**Zadanie 3.** Funkcja liniowa $f$ spełnia warunek $f(2019x + 1) = x + 2019$. Zatem prawdą jest, że:

☐ a) $f(1) = 2019$,
☐ b) $f(-1) = 2018$,
☐ c) $f(0) < 2020$.

**Zadanie 4.** O godzinie 12.30 wskazówki zegara tworzą kąt $165°$. Niech $t$ oznacza czas, po którym sytuacja ta się powtórzy. Prawdą jest, że:

☐ a) $t < 5\frac{1}{3}$ min,
☐ b) $t < 5\frac{1}{2}$ min,
☐ c) $t < 5\frac{2}{3}$ min.

**Zadanie 5.** Wysokości trójkąta mają długość $2\frac{2}{5}$, $3$, $4$. Niech $P$ oznacza pole tego trójkąta. Prawdą jest, że:

☐ a) $P < 5$,
☐ b) $P < 6$,
☐ c) $P < 7$.

**Zadanie 6.** Liczb pierwszych $p$ takich, że liczby $p+6$, $p+12$, $p+18$, $p+24$, $p+30$ są jednocześnie liczbami pierwszymi jest:

☐ a) mniej niż 5,
☐ b) mniej niż 3,
☐ c) mniej niż 2.

**Zadanie 7.** Przez punkt $P$ leżący wewnątrz koła poprowadzono dwie proste, z których jedna przecina okrąg tego koła w punktach $A$ i $B$, a druga $C$ i $D$. Jeśli $|AB| = 13$, $|PB| = 5$, $|PD| = 4$, to:

☐ a) $|CD| = 14$,
☐ b) $|CP| \cdot |CD| = |AP| \cdot |AB|$,
☐ c) $|CP| - |AP| = |PB| - |PD|$.

**Zadanie 8.** Równanie $x^5 + x^2 + 1 = 0$ ma:

- [ ] a) więcej niż jedno rozwiązanie rzeczywiste,
- [ ] b) więcej niż dwa rozwiązania rzeczywiste,
- [ ] c) więcej niż trzy rozwiązania rzeczywiste.

**Zadanie 9.** Jeśli ciąg $(a_n)$ jest ciągiem rosnącym o wyrazach dodatnich, to ciągiem rosnącym jest również ciąg:

- [ ] a) $b_n = 2019(a_n)^2$,
- [ ] b) $b_n = (a_n)^{2019}$,
- [ ] c) $b_n = \frac{-2019}{a_n}$.

**Zadanie 10.** Liczby $b$ i $c$ są liczbami pierwszymi. Równanie $x^2+bx+c=0$ ma dwa różne pierwiastki całkowite. Wynika stąd, że:

- [ ] a) $b$ jest liczbą nieparzystą,
- [ ] b) $c$ jest liczbą nieparzystą,
- [ ] c) $b = c + 1$.

**Zadanie 11.** Zbiór rozwiązań nierówności $x(x+b) < -c$ zawiera przedział $(1, 2)$. Wynika stąd, że:

- [ ] a) $b + c \leqslant -1$,
- [ ] b) $b + c < -1$,
- [ ] c) $4 + b \leqslant -b - c$.

**Zadanie 12.** Liczby 2018 i 2019 są pierwiastkami równania

$$x^{2019} + a_{2018}x^{2018} + a_{2017}x^{2017} + \ldots + a_1x + a_0 = 0,$$

gdzie $a_{2018},\ a_{2017}, \ldots,\ a_1,\ a_0$ są liczbami całkowitymi. Wynika stąd, że:

- [ ] a) $a_0 = 2018 \cdot 2019$,
- [ ] b) $a_0 = \frac{2018+2019}{2}$,
- [ ] c) $a_0$ jest podzielna przez $2018^2 + 2018$.

**Zadanie 13.** Ostatnią cyfrą liczby równej sumie $1 + 2 + 3 + \ldots + n$, gdzie $n$ jest liczbą naturalną dodatnią, nie może być:

- [ ] a) 2,
- [ ] b) 4,
- [ ] c) 7.

**Zadanie 14.** Liczba $\sqrt{2019\sqrt{2019\sqrt{2019\ldots}}}$ jest:

- [ ] a) równa 2019,
- [ ] b) liczbą pierwszą,
- [ ] c) liczbą podzielną przez 3.

**Zadanie 15.** Równanie $2\sqrt{3}x^2 + 3\sqrt{3}y^2 = 6\sqrt{2}xy$ opisuje na płaszczyźnie figurę, która:

☐ a) ma nieskończenie wiele środków symetrii,
☐ b) ma jedną oś symetrii,
☐ c) jest sumą dwóch prostych.

**Zadanie 16.** Wielomian $W(x) = x^3 + (m-1)x^2 - (m+1)x + 1$:

☐ a) ma trzy różne pierwiastki,
☐ b) można rozłożyć na czynniki liniowe,
☐ c) ma pierwiastki, których iloczyn jest równy $-1$.

**Zadanie 17.** Istnieje taka liczba rzeczywista $a$, że zbiorem rozwiązań nierówności $a > \frac{a^2-2019}{x+a}$ jest zbiór:

☐ a) pusty,
☐ b) $(0, +\infty)$,
☐ c) $(-\infty, 0)$.

**Zadanie 18.** Funkcją odwrotną do funkcji $f(x) = \frac{2019x+2018}{x-2019}$ jest:

☐ a) $g(x) = \frac{2019x+2018}{x-2019}$,
☐ b) $g(x) = \frac{x-2019}{2019x+2018}$,
☐ c) $g(x) = \frac{2018x+2019}{x-2018}$.

**Zadanie 19.** Prawdziwa jest nierówność:

☐ a) $2019^{2019} \cdot 2018^{2018} > 2019^{2018} \cdot 2018^{2019}$,
☐ b) $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{3}} > \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}$,
☐ c) $(\pi-1)^{\pi-1} \cdot (\pi+1)^{\pi+1} > (\pi-1)^{\pi+1} \cdot (\pi+1)^{\pi-1}$.

**Zadanie 20.** Liczba $\frac{2019}{2\cdot 3} + \frac{2019}{3\cdot 4} + \frac{2019}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{2019}{2018\cdot 2019}$ jest:

☐ a) większa niż 2019,
☐ b) mniejsza niż 1010,
☐ c) mniejsza niż 1000.

## ZADANIA OTWARTE

1. Udowodnij, że jeśli $x > 0$, $y > 0$ i $x + y = 1$, to $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geqslant 9$.
2. Udowodnij, że nie istnieje trójkąt o bokach długości $a$, $b$, $c$ taki, że

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 2.$$

## 3.11 16 kwietnia 2021

**Zadanie 1.** Różnym literom odpowiadają różne cyfry. Jeśli $PW \cdot PWP \cdot S = 2020$, to:

a) $P + W + S > 2$,
b) $P + W + S > 3$,
c) $P + W + S > 4$.

**Zadanie 2.** W trzech kolejnych latach liczba uczestników pewnego konkursu matematycznego wzrastała odpowiednio o 60%, o 140% i o 260%. Średni procentowy wzrost liczby uczestników konkursu w ciągu tych trzech lat jest:

a) większy niż 150%,
b) większy niż 145%,
c) większy niż 140%.

**Zadanie 3.** Liczby $p$ i $q$ są liczbami pierwszymi. Jeśli równanie $x^2 + px + q = 0$ ma dwa pierwiastki całkowite, to:

a) $p - q = 1$,
b) $p$ jest liczbą nieparzystą,
c) $q$ jest liczbą nieparzystą.

**Zadanie 4.** Każdy wielomian stopnia 2021-go jest podzielny przez pewien wielomian:

a) stopnia 2020-go,
b) stopnia 1010-go,
c) stopnia pierwszego.

**Zadanie 5.** Dane są liczby $a = \sqrt{2}^{\sqrt{5}}$, $b = \sqrt{5}^{\sqrt{2}}$, $c = \sqrt{3}^{\sqrt{3}}$. Prawdą jest, że:

a) $a < b < c$,
b) $a < c < b$,
c) $c < a < b$.

**Zadanie 6.** Część całkowita liczby $\log_2 9 + \log_9 8$ nie jest:

a) liczbą pierwszą,
b) liczbą nieparzystą,
c) liczbą mniejszą niż 5.

**Zadanie 7.** Liczby $a$ i $b$ są takimi liczbami całkowitymi, że liczba $2a + 3b$ jest wielokrotnością 17. Prawdą jest, że:

a) $9a + 5b$ jest wielokrotnością 17,
b) $4a + 6b$ jest wielokrotnością 17,
c) $7a + 2b$ jest wielokrotnością 17.

**Zadanie 8.** Równanie $\left[\frac{2x+3}{5}\right] = x$, gdzie $[\cdot]$ oznacza część całkowitą liczby, ma:

a) nieskończenie wiele rozwiązań,
b) mniej niż pięć rozwiązań,
c) mniej niż dwa rozwiązania.

**Zadanie 9.** Liczba kostek w czekoladzie jest nie większa niż 100. Jeśli podzielić czekoladę na trzy równe części, to zostanie 1 kostka. Przy podziale na pięć równych części zostaną 3 kostki, natomiast przy podziale na siedem równych części zostaną 2 kostki. Czekolada ma :

☐ a) mniej niż 50 kostek ,
☐ b) mniej niż 60 kostek ,
☐ c) mniej niż 70 kostek .

**Zadanie 10.** Różnych par liczb całkowitych $(x, y)$ spełniających równanie $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$ jest :

☐ a) więcej niż dwie ,
☐ b) więcej niż trzy ,
☐ c) więcej niż cztery .

**Zadanie 11.** Siedmiu studentów PWSZ w Chełmie zebrało razem 100 książek w zbiórce charytatywnej. Każdy z nich zebrał inną ilość książek. Wśród nich jest trzech studentów, którzy zebrali łącznie co najmniej :

☐ a) 60 książek ,
☐ b) 50 książek ,
☐ c) 40 książek .

**Zadanie 12.** Dla dowolnych liczb dodatnich $a$ i $b$ prawdziwa jest nierówność :

☐ a) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$ ,
☐ b) $a^3 + b^3 \geqslant a^2 b + b^2 a$ ,
☐ c) $\dfrac{a^6}{b^2} + \dfrac{b^6}{a^2} \geqslant a^4 + b^4$ .

**Zadanie 13.** Dwie ostatnie cyfry liczby $99^{99}$ to :

☐ a) 99 ,
☐ b) 91 ,
☐ c) 81 .

**Zadanie 14.** Równanie $\min(x^2, x + 2) = \max(x, 1)$ ma :

☐ a) więcej niż jedno rozwiązanie ,
☐ b) więcej niż dwa rozwiązania ,
☐ c) więcej niż trzy rozwiązania .

**Zadanie 15.** Niech liczby $14, 20, n$ będą takimi liczbami naturalnymi dodatnimi, że iloczyn dowolnych dwóch z nich jest podzielny przez trzecią. Suma wszystkich liczb $n$, które spełniają ten warunek jest :

☐ a) większa od 500 ,
☐ b) większa od 400 ,
☐ c) większa od 300 .

**Zadanie 16.** W trójkącie równoramiennym $ABC$ na podstawie $AB$ zaznaczono punkt $P$, którego odległość od ramion $AC$ i $BC$ wynosi odpowiednio $a$ i $b$. Wysokość tego trójkąta opuszczona na ramię $AC$ jest :

- [ ] a) równa $a + b\sqrt{2}$ ,
- [ ] b) równa $a + b\sqrt{3}$ ,
- [ ] c) równa $\frac{1}{2}a + b$ .

**Zadanie 17.** Dany jest trójkąt ostrokątny $ABC$, w którym $|\measuredangle BAC| = 45°$. Wysokości tego trójkąta przecinają się w punkcie $P$. Prawdą jest, że :

- [ ] a) $|AP| = |CB|$ ,
- [ ] b) $|CP| = |BP|$ ,
- [ ] c) $|CP| + |BP| = |AP|$ .

**Zadanie 18.** Liczba $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1} + \dfrac{3}{\sqrt[3]{2}+1} - 2\sqrt[3]{4}$ jest liczbą :

- [ ] a) pierwszą ,
- [ ] b) parzystą ,
- [ ] c) wymierną .

**Zadanie 19.** Suma wszystkich liczb naturalnych $n$, dla których liczba $\dfrac{n^2+11}{n+1}$ jest liczbą naturalną, jest :

- [ ] a) liczbą podzielną przez 11 ,
- [ ] b) liczbą pierwszą ,
- [ ] c) kwadratem liczby naturalnej .

**Zadanie 20.** W wyrażeniu $(x^3 + x^2)^{10}$, współczynnik przy $x^{21}$, jest :

- [ ] a) liczbą podzielną przez 5 ,
- [ ] b) liczbą podzielną przez 10 ,
- [ ] c) liczbą podzielną przez 15 .

## 3.12 22 kwietnia 2022

**Zadanie 1.** Wszystkich liczb naturalnych dodatnich $n$, dla których liczba $n^3 + 4$ jest podzielna przez $n + 3$ jest:

- [ ] a) nieskończenie wiele,
- [ ] b) mniej niż 3,
- [ ] c) dokładnie 4.

**Zadanie 2.** Ciąg liczb naturalnych dodatnich podzielono na grupy $(1), (2,3), (4,5,6), (7,8,9,10), \ldots$. Wobec tego suma liczb występujących w setnej grupie jest:

- [ ] a) liczbą podzielną przez 50,
- [ ] b) liczbą podzielną przez 100,
- [ ] c) liczbą podzielną przez 2022.

**Zadanie 3.** Najmniejsza wartość, którą przyjmuje wyrażenie $\dfrac{-2ab}{a^2+b^2} + \dfrac{a^2b^2}{a^4+2a^2b^2+b^4}$ dla $a > 0$ i $b > 0$, wynosi:

- [ ] a) $0$,
- [ ] b) $-0{,}75$,
- [ ] c) $-1$.

**Zadanie 4.** Funkcja $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$ ma:

- [ ] a) nieskończenie wiele miejsc zerowych,
- [ ] b) więcej niż dwa miejsca zerowe,
- [ ] c) więcej niż trzy miejsca zerowe.

**Zadanie 5.** Liczby $x, y, z, w$ są rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x = yzw, \\ x + y = zw, \\ x + y + z = w, \\ x + y + z + w = 2 \end{cases}$.

Prawdą jest, że:

- [ ] a) $xyzw = 1$,
- [ ] b) $x^2 + y^2 + z^2 = w^2$,
- [ ] c) $xyzw < 0{,}03$.

**Zadanie 6.** Ramiona kąta o mierze $60^\circ$ przecięto prostą $l$ prostopadłą do jednego z ramion kąta i wpisano dwa koła styczne do obu ramion tego kąta i do prostej $l$. Stosunek obwodu mniejszego koła do obwodu większego koła jest:

- [ ] a) mniejszy niż $\frac{1}{3}$,
- [ ] b) mniejszy niż $\frac{1}{4}$,
- [ ] c) mniejszy niż $\frac{1}{5}$.

**Zadanie 7.** Prawdą jest, że równanie $xy + yz + zx = 1$:

- [ ] a) posiada nieskończenie wiele rozwiązań w zbiorze liczb całkowitych,
- [ ] b) nie posiada rozwiązań w zbiorze liczb całkowitych,
- [ ] c) nie posiada rozwiązań w zbiorze liczb naturalnych.

**Zadanie 8.** Dany jest wielomian $W(x) = (x^{2021} + x - 1)^{2022}$. Suma współczynników przy nieparzystych potęgach $x$ tego wielomianu jest :

- [ ] a) ujemna ,
- [ ] b) równa $\frac{1-3^{2022}}{2}$ ,
- [ ] c) mniejsza od 2022 .

**Zadanie 9.** Odległości środka okręgu wpisanego w trapez prostokątny od końców ramienia nieprostopadłego do podstaw są równe $3a$ i $4a$. Długość tego okręgu jest :

- [ ] a) większa niż $\frac{96}{5}a$ ,
- [ ] b) większa niż $18a$ ,
- [ ] c) większa niż $10a$ .

**Zadanie 10.** Kwadrat o boku 1 metra można całkowicie pokryć trzema kwadratami o bokach :

- [ ] a) 90 cm ,
- [ ] b) 95 cm ,
- [ ] c) 96 cm .

**Zadanie 11.** Liczba $a = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023}$. Prawdą jest, że :

- [ ] a) $a > \frac{13}{60}$ ,
- [ ] b) $a < \frac{101}{420}$ ,
- [ ] c) $a = \frac{5}{21}$ .

**Zadanie 12.** Liczby $p, q$ są takimi liczbami całkowitymi, że wielomian $W(x) = x^3 + x^2 - 10$ spełnia warunki $W(p) = q$ i $W(q) = p$. Prawdą jest, że :

- [ ] a) $p + q > 0$ ,
- [ ] b) $p + q > 2$ ,
- [ ] c) $p + q > 4$ ,

**Zadanie 13.** Kwadratem liczby naturalnej jest liczba :

- [ ] a) $2020 \cdot 2022 + 1$ ,
- [ ] b) $2021 \cdot 2023 + 1$ ,
- [ ] c) $2022 \cdot 2023 + 1$ .

**Zadanie 14.** Liczbę 2022 można przedstawić w postaci sumy :

- [ ] a) czterech kolejnych liczb naturalnych ,
- [ ] b) dziesięciu kolejnych liczb naturalnych ,
- [ ] c) dwudziestu kolejnych liczb naturalnych .

**Zadanie 15.** Niepusty zbiór rozwiązań nierówności $ax^2 + bx + c < 0$ zawiera się w przedziale $(0, 3\rangle$. Wtedy :

- [ ] a) $b = -3a$ ,
- [ ] b) $b < 0$ i $c \geqslant 0$ ,
- [ ] c) $b \geqslant -6a$ .

**Zadanie 16.** Liczbą sześciocyfrową podzielną przez 7 niezależnie od tego jakimi cyframi są cyfry $A$ i $B$ jest:

- a) $AABBAB$,
- b) $ABABAB$,
- c) $BBBAAA$.

**Zadanie 17.** Jeśli $a - \frac{1}{a} = 1$, to:

- a) $a^3 - \frac{1}{a^3} = 1$,
- b) $a^3 - \frac{1}{a^3} > 1$,
- c) $a^3 - \frac{1}{a^3} = 4$.

**Zadanie 18.** Jeżeli $\log_7 3 = a$, to:

- a) $\log_{49} 9 = a^2$,
- b) $\log_{49} 3 = \frac{1}{2}a$,
- c) $\log_{\frac{1}{3}} 7 = -\frac{1}{a}$.

**Zadanie 19.** Liczba wszystkich różnych dzielników liczby $2022^{2022}$ jest liczbą:

- a) podzielną przez 2022,
- b) podzielną przez 2021,
- c) podzielną przez 2023.

**Zadanie 20.** Ciąg $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ jest:

- a) ciągiem zbieżnym,
- b) ciągiem zbieżnym do 0,
- c) ciągiem zbieżnym do 2022.

## ZADANIA OTWARTE

1. Dane są różne od 0 liczby rzeczywiste $a$ i $b$. Udowodnij, że

$$a^2 + \frac{1}{a^2} + b\left(b + \frac{1}{a}\right) \geqslant \sqrt{3}.$$

2. Dany jest trójkąt o bokach długości $a$, $b$, $c$. Wykaż, że z odcinków o długościach $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ można zbudować trójkąt .

## 3.13 23 marca 2023

**Zadanie 1.** Dany jest równoległobok, którego pole jest dwa razy mniejsze od pola prostokąta o bokach odpowiednio równych bokom tego równoległoboku. Miara kąta ostrego tego równoległoboku jest :

- a) mniejsza niż $10°$ ,
- b) mniejsza niż $20°$ ,
- c) mniejsza niż $30°$ .

**Zadanie 2.** Równanie $\sqrt{x^2 - 10x + 25} + \sqrt{x^2 + 10x + 25} = 0$ ma :

- a) 2023 rozwiązań ,
- b) jedno rozwiązanie ,
- c) nieskończenie wiele rozwiązań .

**Zadanie 3.** Funkcja $f$ określona jest wzorem $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$, $x \geqslant 1$. Jeżeli $w = f(\pi)$, to :

- a) $w$ jest liczbą całkowitą ,
- b) $w > 2$ ,
- c) $w < 2$ .

**Zadanie 4.** Liczba $13^{2023} + 11^{2023} + 7^{2023} - 1$ jest liczbą :

- a) nieparzystą ,
- b) podzielną przez 7 ,
- c) pierwszą .

**Zadanie 5.** Przekątne $AC$ i $BD$ trapezu $ABCD$ o podstawach $AB$ i $CD$, gdzie $|AB| > |CD|$, przecinają się w punkcie $O$. Jeżeli pole trójkąta $ABO$ jest równe 2023 a pole trójkąta $CDO$ jest równe 1, to pole trapezu $ABCD$ jest :

- a) równe $2023 + \sqrt{2023}$ ,
- b) równe $2023 + 2\sqrt{2023}$ ,
- c) większe od $2023 + 2\sqrt{2023}$ .

**Zadanie 6.** Jeżeli $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, a $K = \frac{a+c}{b+d}$, to :

- a) $\frac{a}{b} < K$ ,
- b) $K \leqslant \frac{a}{b}$ ,
- c) $\frac{b}{a} > \frac{1}{K}$ .

**Zadanie 7.** Płaszczyzn zawierających cztery wierzchołki danego sześcianu jest :

- a) więcej niż 10 ,
- b) więcej niż 11 ,
- c) więcej niż 12 .

**Zadanie 8.** Resztą z dzielenia wielomianu $W(x) = x^{2023} + x^{2021} + 1$ przez wielomian $P(x) = x^2 - 1$ jest:

☐ a) $2x + 1$,
☐ b) $2023x + 2021$,
☐ c) $2x - 2023$.

**Zadanie 9.** Niech $x_1$, $x_2$ będą naturalnymi pierwiastkami równania $x^2+(2m+1)x+3 = 0$. Wartość wyrażenia $x_1^{2023} + x_2^{2023}$ może być:

☐ a) równa 2023,
☐ b) większa niż $3^{2023}$,
☐ c) ujemna.

**Zadanie 10.** Liczba $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 100$ kończy się:

☐ a) dwudziestoma zerami,
☐ b) trzydziestoma zerami,
☐ c) czterdziestoma zerami.

**Zadanie 11.** Prawdą jest, że:

☐ a) $\log_3 4 < \log_7 6$,
☐ b) $\log_4 65 > \log_5 123$,
☐ c) $\log 2023 < \log_{2023} \frac{2022}{2023}$.

**Zadanie 12.** Adam, Bartek i Czarek złożyli się i kupili rower. Każdy z nich dał tyle pieniędzy, że nie przekracza to połowy sumy pieniędzy włożonych przez dwóch pozostałych. Jeżeli rower kosztował 2022 zł, to Adam dał:

☐ a) mniej niż 650 zł,
☐ b) więcej niż 680 zł,
☐ c) mniej niż 670 zł,

**Zadanie 13.** Jeśli $\alpha$ jest kątem ostrym i $\sin\alpha\cos\alpha = m$, to $\sin\alpha + \cos\alpha$ równa się:

☐ a) $\sqrt{1+m}$,
☐ b) $\sqrt{1+2m}$,
☐ c) $\sqrt{1+4m}$.

**Zadanie 14.** Dla każdej liczby naturalnej $n$ prawdą jest, że:

☐ a) liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 5,
☐ b) liczba $n^3 + 11n$ jest podzielna przez 6,
☐ c) liczba $n^3 - 19n$ jest podzielna przez 6.

**Zadanie 15.** Proste o równaniach $y = ax$ i $y = -x + b$ przecinają się w punkcie, którego obie współrzędne są ujemne. Wynika stąd, że:

☐ a) $a > 0$ i $b < 0$,
☐ b) $a > 0$ i $b > 0$,
☐ c) $a < 0$ i $b > 0$.

**Zadanie 16.** W trapezie $ABCD$, $AB||CD$, punkty $E$ i $F$ są środkami ramion trapezu, punkt $G$ należy do podstawy $AB$ i jest różny od punktów $A$ i $B$, punkt $H$ należy do podstawy $DC$ i jest różny od punktów $D$ i $C$. Pole czworokąta wypukłego, którego wierzchołkami są punkty $E, G, F, H$ jest równe 2023. Pole trapezu $ABCD$ jest:

☐ a) większe od 4000,
☐ b) większe od 4046,
☐ c) mniejsze od $2023\sqrt{3}$.

**Zadanie 17.** Wielomian $W$ trzeciego stopnia o współczynnikach całkowitych, taki, że $W(2023) = 2024$ i $W(2024) = 2025$ i $W(2025) = 2023$:

☐ a) nie istnieje,
☐ b) spełnia warunek $W(2026) = 2024$,
☐ c) spełnia warunek $W(2022) = 2023$.

**Zadanie 18.** Dla pewnych liczb całkowitych $a$, $b$ liczba $2a + 3b$ jest podzielna przez 17. Wynika stąd, że wielokrotnością 17 jest liczba:

☐ a) $19a + 20b$,
☐ b) $9a + 5b$,
☐ c) $15a + 14b$.

**Zadanie 19.** Jeśli rozwiązania równania $x^2 + bx + c = 0$ są kwadratami rozwiązań równania $x^2 + mx + n = 0$, to:

☐ a) $b + c = n^2 - m^2$,
☐ b) $bc = n^2 + m^2$,
☐ c) $b = 2n - m^2$.

**Zadanie 20.** Wszystkich liczb całkowitych $k$ dla których $\frac{k^2+1}{k+1}$ jest liczbą całkowitą jest:

☐ a) więcej niż 2023,
☐ b) więcej niż 10,
☐ c) mniej niż 5.

## ZADANIA OTWARTE

1. Znajdź najmniejszą liczbę naturalną $n$ taką, aby liczby $n - 100$ i $n + 3$ były kwadratami liczb naturalnych.

2. Dany jest trapez o polu 2023 i podstawach $AB$ i $CD$. Dwusieczna kąta $ABC$ jest prostopadła do ramienia $AD$ i przecina je w takim punkcie $E$, że $|AE| = 2|ED|$. Oblicz pole trójkąta $ABE$.

# 4 Kategoria II

Uczniowie klasy III i IV szkoły ponadpodstawowej.

Zakres materiału:

- Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory. Działania w zbiorze liczb rzeczywistych.
- Język matematyki
- Funkcje (określanie funkcji, własności funkcji, przekształcenia wykresu funkcji)
- Funkcja liniowa
- Funkcja kwadratowa
- Planimetria
- Wielomiany i funkcje wymierne
- Funkcje trygonometryczne
- Ciągi liczbowe
- Geometria analityczna
- Funkcje wykładnicze i funkcje logarytmiczne
- Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej
- Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa
- Elementy statystyki opisowej
- Stereometria

## 4.1 26 marca 2010

**Zadanie 1.** Funkcja $f$ dana jest wzorem $f(x) = \frac{x}{x-1}$ i niech $f^n(x) = f(f(\ldots(f(x)\ldots)))$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$. Wówczas

☐ a) $f^2(x) = x$ dla każdego $x \neq 1$,
☐ b) $f^6(3) = 3$,
☐ c) $f^9(3) = 1{,}5$.

**Zadanie 2.** Ciągi $(a_n)$ i $(b_n)$ są rozbieżne do $+\infty$. Wynika stąd, że:

☐ a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$,
☐ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$,
☐ c) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$.

**Zadanie 3.** Równanie $2^{\sin x} = -\sin^2 x$

☐ a) ma nieskończenie wiele rozwiązań,
☐ b) nie ma rozwiązania,
☐ c) ma 2 rozwiązania.

**Zadanie 4.** Liczba $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$ jest

☐ a) dodatnia,
☐ b) całkowita,
☐ c) równa zeru.

**Zadanie 5.** Przekrój płaski czworościanu foremnego może być

☐ a) trójkątem rozwartokątnym,
☐ b) trójkątem prostokątnym,
☐ c) pięciokątem.

**Zadanie 6.** Liczba 100! jest podzielna przez

☐ a) $5^{22}$,
☐ b) $51^2$,
☐ c) $49^8$.

**Zadanie 7.** W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych 2 i 3 dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na dwa odcinki, z których jeden ma długość

☐ a) $\sqrt{2{,}08}$,
☐ b) $\frac{3\sqrt{13}}{5}$,
☐ c) mniejszą od 1,5.

**Zadanie 8.** Rozwiązaniem równania $x^{x\sqrt{x}} = \left(x\sqrt{x}\right)^x$ jest

☐ a) 2,25,
☐ b) $\frac{3}{2}$,
☐ c) 1.

**Zadanie 9.** Jeśli $a \circ b = 2ab - a - b$ i $5 \circ 3 = 4 \circ x$ to $x$ jest równe

- [ ] a) $3\frac{2}{5}$,
- [ ] b) $3\frac{5}{7}$,
- [ ] c) 4.

**Zadanie 10.** Najdłuższy bok trójkąta ma długość 3 a najkrótszy 1. Największe pole trójkąta spełniającego te warunki jest równe

- [ ] a) $\frac{3}{2}$,
- [ ] b) $\frac{\sqrt{35}}{5}$,
- [ ] c) $\frac{\sqrt{35}}{4}$.

**Zadanie 11.** Wiadomo, że liczba bakterii w pewnej populacji codziennie się podwaja. Populacja ta osiąga maksymalną liczebność po 30 dniach. Wynika stąd, że populacja osiągnie 0,03125 liczebności maksymalnej po

- [ ] a) 20 dniach,
- [ ] b) 22 dniach,
- [ ] c) 25 dniach.

**Zadanie 12.** Funkcja $f(x) = |||x| - 1| - 1|$

- [ ] a) nie ma ekstremów,
- [ ] b) ma trzy ekstrema,
- [ ] c) ma pięć ekstremów.

**Zadanie 13.** Ciąg $(a_n)$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $q$ i sumie wyrazów $S$, zaś ciąg $(b_n)$ określony jest wzorem $b_n = a_n^2$. Wynika stąd, że suma ciągu $(b_n)$

- [ ] a) istnieje,
- [ ] b) jest równa $S^2$,
- [ ] c) jest równa $\frac{a_1 S}{1+q}$.

**Zadanie 14.** Sześcian i walec mają równe objętości. Wobec tego

- [ ] a) pole powierzchni całkowitej walca jest mniejsze od pola powierzchni całkowitej sześcianu,
- [ ] b) pole powierzchni całkowitej walca może być większe od pola powierzchni całkowitej sześcianu,
- [ ] c) pole powierzchni całkowitej walca jest najmniejsze gdy przekrój osiowy walca jest kwadratem.

**Zadanie 15.** Obrazem kwadratu $K$ w translacji jest kwadrat $K_1$ i częścią wspólną tych kwadratów jest kwadrat $K_2$ o polu dwa razy mniejszym niż pole kwadratu przesuniętego. Wobec tego:

- [ ] a) przekątna kwadratu $K_2$ ma długość równą długości boku kwadratu $K_1$,
- [ ] b) wektor przesunięcia ma długość będącą liczbą niewymierną,
- [ ] c) długość wektora przesunięcia możne być równa 1.

**Zadanie 16.** Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ losujemy jedną. Wobec tego prawdopodobieństwo, że wylosowana liczba jest

☐ a) podzielna przez trzy wynosi $\frac{1}{3}$,
☐ b) pierwsza wynosi $\frac{2}{5}$,
☐ c) kwadratem liczby naturalnej wynosi $\frac{1}{5}$.

**Zadanie 17.** Kulę ziemską opasano taśmą przylegającą do jej powierzchni wzdłuż równika (przyjmujemy, że równik jest okręgiem). Następnie taśmę przecięto i doklejono 10m taśmy tak, aby uzyskać równy prześwit między taśmą a Ziemią w każdym miejscu. Czy przez ten prześwit przejdzie swobodnie:

☐ a) koń (200 cm wysokości),
☐ b) pies (120 cm wysokości),
☐ c) mysz (5 cm wysokości)?.

**Zadanie 18.** Dziesięciokrotność iloczynu sześcianu 1000 trylionów przez odwrotność kwadratu miliona bilionów wynosi:

☐ a) $10^{27}$,
☐ b) $10^{99}$,
☐ c) $10^{100}$.

**Zadanie 19.** Niech $[x]$ oznacza część całkowitą z $x$. Wówczas układ równań $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ [x] + [y] = -1 \end{cases}$ :

☐ a) ma więcej niż dwa rozwiązania,
☐ b) ma nie więcej niż dwa rozwiązania,
☐ c) nie ma rozwiązania.

**Zadanie 20.** Jeżeli S jest sumą współczynników wielomianu
$W(x) = (-2x^3 + x^2 - 3x + 3)^{2010}$, to:

☐ a) $S = -1$,
☐ b) $S = -2010$,
☐ c) $S = -2 \cdot 2010$.

## ZADANIA OTWARTE

1. W turnieju szachowym uczestniczyło 100 uczniów. Turniej trwał cały rok szkolny, a każdy uczeń rozegrał z każdym tylko jedną partię i nie zanotowano remisów. Niech $x_i$ będzie liczbą zwycięstw zawodników o numerze $i$ na liście startowej, zaś $y_i$ niech będzie liczbą jego przegranych.
   Udowodnij, że $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{100}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{100}^2$.

2. Pająk rozpina nitki pajęczyny we wnętrzu szklanego sześcianu. Początek i koniec każdej nitki znajduje się bądź w wierzchołku, bądź na środku ściany, nigdy jednak na tej samej ścianie sześcianu. Ile nitek może w ten sposób rozpiąć?

## 4.2 14 kwietnia 2011

**Zadanie 1.** Dane są dwie różne liczby pierwsze $p$ i $q$. Liczbą niewymierną jest liczba

- a) $\sqrt{pq}$,
- b) $\sqrt{p+q}$,
- c) $p\sqrt{q} - q\sqrt{p}$.

**Zadanie 2.** Wykres funkcji $f(x) = ||x-1|-2| + ||x-2|-1|$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, ma z osią $OX$:

- a) dokładnie jeden punkt wspólny,
- b) dokładnie dwa punkty wspólne,
- c) więcej niż jeden punkt wspólny.

**Zadanie 3.** Po uproszczeniu wyrażenie $a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}}$ przyjmie wartość

- a) $ab$,
- b) $0$,
- c) $1$.

**Zadanie 4.** W klasie można posadzić uczniów w ławkach trzyosobowych na $k$ sposobów, przy czym $k$ jest 240 razy większe od liczby uczniów. Zatem w klasie jest

- a) 17 uczniów,
- b) parzysta liczba uczniów,
- c) nieparzysta liczba uczniów.

**Zadanie 5.** Układ równań $\begin{cases} x^2 + y^2 = k^2 \\ x + y = k \end{cases}$ dla $k \neq 0$

- a) nie ma rozwiązania,
- b) ma jedno rozwiązanie,
- c) ma dwa rozwiązania.

**Zadanie 6.** Dany jest prostokąt $ABCD$ o bokach długości 8 i 6. Rzuty prostokątne punktów $B$ i $D$ na przekątną $AC$

- a) dzielą przekątną na trzy przystające części,
- b) wyznaczają trzy odcinki takie, że długość każdego z nich nie przekracza 3,6,
- c) dzielą przekątną na odcinki o niewymiernych długościach.

**Zadanie 7.** Liczba $\operatorname{tg}^6 20^\circ - 33 \operatorname{tg}^4 20^\circ + 27 \operatorname{tg}^2 20^\circ$ jest

- a) mniejsza niż 1,
- b) mniejsza niż 2,
- c) mniejsza niż 3.

**Zadanie 8.** Danych jest $n$ punktów w przestrzeni. Wiadomo, że $m$ punktów ($m \leqslant n$) leży w jednej płaszczyźnie i żadne cztery punkty z $n-m$ punktów nie są współpłaszczyznowe, a żadne trzy z $m$ punktów nie są współliniowe. Liczba czworościanów, których wierzchołki znajdują się w tych punktach, wynosi

- [ ] a) $\binom{n-m}{4}$,
- [ ] b) $\binom{n}{4} - \binom{m}{4}$,
- [ ] c) $\binom{n}{4} - \binom{n}{3} \cdot m$.

**Zadanie 9.** Układ równań $\begin{cases} x^2 - 4my + k^2 = 1 \\ \frac{y-x}{x+y} + \frac{x+y}{y-x} = -\frac{10}{3} \end{cases}$

- [ ] a) ma dwa rozwiązania dla dwóch wartości całkowitych parametru $m$,
- [ ] b) ma dwa rozwiązania dla czterech wartości całkowitych parametru $m$,
- [ ] c) nie ma dwóch rozwiązań dla żadnej wartości całkowitej parametru $m$.

**Zadanie 10.** Wykres funkcji $f(x) = \sin^2 x + |\cos x| \cdot \cos x$, dla $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

- [ ] a) jest odcinkiem dla pewnych $x$,
- [ ] b) jest wykresem funkcji rosnącej,
- [ ] c) nie przecina osi $OX$.

**Zadanie 11.** Ciąg liczb naturalnych dodatnich podzielono na grupy: $(1), (2,3), (4,5,6), (7,8,9,10), \ldots$. Wobec tego suma liczb występujących w $n$-tej grupie wynosi:

- [ ] a) $\frac{n(n+1)}{2}$,
- [ ] b) $\frac{n^4-1}{4}$,
- [ ] c) $\frac{1}{2}(n^3+n)$.

**Zadanie 12.** Równanie $1 - 3 \cdot 2^{\log x} = x^{\log 2}$

- [ ] a) nie ma rozwiązania,
- [ ] b) ma jedno rozwiązanie wymierne,
- [ ] c) ma jedno rozwiązanie całkowite.

**Zadanie 13.** Zbiór punktów przestrzeni jednakowo oddalonych od dwóch różnych prostych jest

- [ ] a) zawsze prostą,
- [ ] b) zawsze płaszczyzną,
- [ ] c) może nie być ani prostą, ani płaszczyzną.

**Zadanie 14.** Miary kątów trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny, a jego obwód jest równy $3 + \sqrt{3}$. Wobec tego

- [ ] a) pole trójkąta wynosi 1,
- [ ] b) promień okręgu wpisanego w trójkąt jest mniejszy od $\frac{1}{2}$ ,
- [ ] c) pole koła opisanego na trójkącie wynosi $\pi$.

**Zadanie 15.** Funkcja $f$ dana wzorem $f(x) = \sqrt{1 - \cos x}$

☐ a) jest określona tylko dla $x \in \langle 0, 1 \rangle$,
☐ b) ma maksimum równe $\sqrt{2}$,
☐ c) ma minimum równe 0.

**Zadanie 16.** Na drodze $a$ metrów przednie koło bryczki obróciło się $x$ razy, a tylne koło wykonało $b$ obrotów mniej. Oznaczając przez $y$ różnicę obwodów tylnego i przedniego koła otrzymujemy:

☐ a) $xy(x - b) = ab$,
☐ b) $xy(x - a) = ab$,
☐ c) $y = \frac{a}{x-b} - \frac{b}{x}$.

**Zadanie 17.** Dany jest układ równań $\begin{cases} x^4 + y^4 = 1 \\ [x] + [y] = 1 \end{cases}$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą z $x$. Zatem

☐ a) $x \in (0, 1)$,
☐ b) $x = 0$ i $y = 1$ lub $x = 1$ i $y = 0$,
☐ c) $y \in (-1, 0)$.

**Zadanie 18.** Niech $A$ i $B$ będą skończonymi zbiorami. Istnieje dokładnie jedna funkcja różnowartościowa ze zbioru $A$ na $B$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

☐ a) $A$ i $B$ mają po tyle samo elementów,
☐ b) $B$ ma co najmniej tyle elementów, co $A$,
☐ c) $A$ i $B$ mają po jednym elemencie.

**Zadanie 19.** Prawdziwe jest zdanie:

☐ a) $[x] + \operatorname{sgn}(x) = [x + \operatorname{sgn}(x)]$,
☐ b) $|x + \operatorname{sgn}(x)| \geqslant |x|$,
☐ c) $x + [x] = 2[x] - \operatorname{sgn}(x)$.

**Zadanie 20.** Z 7 cyfr można utworzyć 42 liczby siedmiocyfrowe. Zatem ilość jednakowych cyfr w tej liczbie wynosi:

☐ a) 2,
☐ b) 5,
☐ c) więcej niż 3.

## ZADANIA OTWARTE

1. Oblicz pole trójkąta prostokątnego wpisanego w okrąg o promieniu $R$, jeśli wiadomo, że odległość stycznej do okręgu, poprowadzonej w wierzchołku kąta prostego, od jednego z pozostałych wierzchołków tego trójkąta jest równa $a$, $(a \geqslant R)$.

2. Wyznaczyć takie wszystkie trójki liczb naturalnych $x, y, z$, że liczby $x^2 + 1$ i $y^2 + 1$ są pierwsze oraz
$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) = z^2 + 1.$$

## 4.3 12 kwietnia 2012

**Zadanie 1.** Liczby $x$ i $y$ spełniają równanie $x^2+y^2=1$. Czy $x$ i $y$ mogą być jednocześnie liczbami postaci:

☐ a) $\frac{\sqrt{2}}{4}+a$, gdzie $a$ jest liczbą wymierną?

☐ b) $\sqrt{5}\cdot a$, gdzie $a$ jest liczbą wymierną?

☐ c) $\frac{\sqrt{7}}{4}+a$, gdzie $a$ jest liczbą wymierną?

**Zadanie 2.** Dana jest funkcja $f(x)=\frac{1}{x-1}$, $x\neq 1$. Dla jakich $x$ jest spełniona nierówność $f(f(x))\geqslant f(x)$?

☐ a) $x\in\left\langle\frac{1-\sqrt{5}}{2},1\right)\cup\left\langle\frac{1+\sqrt{5}}{2},2\right)$,

☐ b) $x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$,

☐ c) $x\in\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},1\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},2\right)$.

**Zadanie 3.** Kula o promieniu $R$ ma tę samą objętość, co sześcian o przekątnej $\sqrt{3}$. Ile wynosi $R$?

☐ a) $\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$,

☐ b) $\sqrt[3]{\frac{3\pi}{4}}$,

☐ c) $\sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}}$.

**Zadanie 4.** Wiadomo, że dla różnych od zera liczb $a$ i $b$ zachodzi związek $\frac{10a+5b}{2a}=6$. Wartość wyrażenia $\frac{4a-3b}{7b}$ jest

☐ a) liczbą parzystą,

☐ b) kwadratem liczby pierwszej,

☐ c) liczbą postaci $3k+1$, gdzie $k$ jest dowolną liczbą całkowitą.

**Zadanie 5.** Nieprawdą jest, że:

☐ a) każda liczba postaci $n^4-2n^3-n^2+2n$ dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$ jest podzielna przez 12,

☐ b) żadna liczba postaci $n^2+3n+5$, dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$ nie jest podzielna przez 127,

☐ c) każda liczba postaci $n^5-5n^3+4n$ dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$ jest podzielna przez 5.

**Zadanie 6.** Liczba $\sqrt[3]{25-27\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{4}}+\sqrt[3]{2}$ jest

☐ a) liczbą całkowitą,

☐ b) równa $\sqrt[3]{5}$,

☐ c) liczbą niewymierną.

**Zadanie 7.** Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)=x^{2012}+1$ przez wielomian $Q(x)=x^3-x$ wynosi:

☐ a) $x^2-1$,

☐ b) $x^2+1$,

☐ c) $x^2+x$.

**Zadanie 8.** Liczby $a, b, c$ (dodatnie i różne od 1) tworzą ciąg geometryczny. Wynika z tego, że liczby $\frac{1}{\log_a n}, \frac{1}{\log_b n}, \frac{1}{\log_c n}$, $(n \in \mathbb{N}$ i $n > 1)$:

- [ ] a) tworzą ciąg geometryczny,
- [ ] b) tworzą ciąg arytmetyczny,
- [ ] c) tworzą ciąg arytmetyczno-geometryczny.

**Zadanie 9.** Liczby naturalne dodatnie pogrupowano w następujący sposób: $\{1\}, \{2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{7, 8, 9, 10\}, \ldots$ itd. Prawdą jest, że

- [ ] a) liczba 2012 jest w grupie 63,
- [ ] b) suma liczb z grupy, w której występuje liczba 2012 wynosi 125055,
- [ ] c) w 2012 grupie jest 2012 liczb.

**Zadanie 10.** Okrąg wpisany w trójkąt prostokątny dzieli punktem styczności przeciwprostokątną na odcinki o długościach $a$ i $b$. Wtedy

- [ ] a) pole trójkąta wynosi $ab$,
- [ ] b) promień okręgu opisanego na trójkącie wynosi $a + b$,
- [ ] c) pole trójkąta wynosi $\frac{ab}{2}$.

**Zadanie 11.** Tę samą dwucyfrową liczbę naturalną napisano trzy razy obok siebie. Uzyskana w ten sposób liczba 6-cio cyfrowa

- [ ] a) dzieli się przez 13,
- [ ] b) dzieli się przez 7,
- [ ] c) dzieli się przez 3.

**Zadanie 12.** Działanie $\otimes$ jest zdefiniowane w zbiorze liczb rzeczywistych w następujący sposób: $x \otimes y = xy(x + y)$. Wtedy dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$:

- [ ] a) $x \otimes y = y \otimes x$,
- [ ] b) $x \otimes y = -(y \otimes x)$,
- [ ] c) $(-x) \otimes y = -(y \otimes x)$.

**Zadanie 13.** Na okręgu o promieniu $15\sqrt{5}$ opisano kwadrat $ABCD$. Środek $E$ boku $DC$ połączono z wierzchołkiem $A$ odcinkiem, który przecina okrąg w punkcie $M$. Wobec tego

- [ ] a) długość odcinka $EM$ wynosi 60,
- [ ] b) długość odcinka $AE$ wynosi 75,
- [ ] c) długość odcinka $EM$ jest mniejsza niż 60.

**Zadanie 14.** Funkcja $f(x) = \sin(\cos(x))$ określona dla wszystkich liczb rzeczywistych

- [ ] a) jest okresowa,
- [ ] b) ma nieskończenie wiele miejsc zerowych,
- [ ] c) ma największą wartość równą 1.

**Zadanie 15.** Zbiór $P$ jest dziedziną funkcji $f$ określonej wzorem $f(x) = \sqrt{\log \sin x}$. Wtedy

- [ ] a) funkcja $f$ przyjmuje nieskończenie wiele różnych wartości dla $x \in P$,
- [ ] b) wszystkie liczby rzeczywiste z przedziału $(0, \pi)$ należą do $P$,
- [ ] c) funkcja $f$ przyjmuje tylko jedną wartość dla $x \in P$.

**Zadanie 16.** Układ równań $\begin{cases} xy + yz + zx = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$ ma:

☐ a) nie mniej niż jedno rozwiązanie,

☐ b) nie mniej niż dwa rozwiązania ,

☐ c) nie mniej niż trzy rozwiązania.

**Zadanie 17.** W walec o promieniu podstawy długości $r$ i wysokości długości $r$ wpisano graniastosłup prawidłowy sześciokątny. Wówczas

☐ a) stosunek objętości walca do objętości graniastosłupa wynosi $\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$,

☐ b) stosunek powierzchni bocznej walca do powierzchni bocznej graniastosłupa wynosi $\frac{2\pi}{3}$,

☐ c) objętość graniastosłupa wynosi $3r^3\sqrt{3}$.

**Zadanie 18.** W kulę o promieniu 5 wpisano ostrosłup prawidłowy czworokątny o wysokości długości 8. Wobec tego:

☐ a) długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa wynosi $4\sqrt{2}$,

☐ b) objętość ostrosłupa wynosi $\frac{256}{3}$,

☐ c) stosunek pola powierzchni kuli do pola powierzchni bocznej ostrosłupa wynosi $\frac{25}{24}\pi$.

**Zadanie 19.** W garderobie stoi $n$ par butów ($n > 10$). Wybieramy losowo dwa buty. Wówczas prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy:

☐ a) dwa buty na tę samą nogę jest równe $\frac{1}{2}$,

☐ b) dwa prawe buty jest mniejsze od $\frac{1}{4}$,

☐ c) buty z jednej pary jest równe $\frac{1}{2n-1}$.

**Zadanie 20.** W turnieju bierze udział $2n$ drużyn rozdzielonych do dwóch równolicznych grup. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że dwie najsilniejsze drużyny znajdą się w dwóch różnych grupach wynosi

☐ a) $\frac{\binom{2}{1}\binom{2n-2}{n-1}}{\binom{2n}{n}}$,

☐ b) $\frac{\binom{n}{2}\binom{2n-2}{n}}{\binom{2n}{n}}$,

☐ c) $\frac{n}{2n-1}$.

## ZADANIA OTWARTE

1. Dwie pompy pracując razem napełniają basen w ciągu 7,5h. Po 5h wspólnej pracy pompa nr 2 uległa awarii, zaś pompa nr 1 ukończyła napełnianie basenu w 4h po awarii. Oblicz jak długo trwałoby napełnianie zbiornika, gdyby po 3h wspólnej pracy zepsuła się pompa nr 1.

2. Promienie dwóch okręgów stycznych zewnętrznie wynoszą odpowiednio $R$ i $r$. Znajdź promień okręgu stycznego do nich i do wspólnej stycznej zewnętrznej.

## 4.4 12 kwietnia 2013

**Zadanie 1.** Jeżeli $a+b=1$, to prawidłowe są nierówności:

- [ ] a) $a^2+b^2 \geqslant \frac{1}{2}$,
- [ ] b) $a^3+b^3 \geqslant \frac{1}{4}$,
- [ ] c) $a^4+b^4 \geqslant \frac{1}{8}$.

**Zadanie 2.** Liczba $\log \operatorname{tg} 40^{\circ} \cdot \log \operatorname{tg} 41^{\circ} \cdot \ldots \cdot \log \operatorname{tg} 50^{\circ}$ jest:

- [ ] a) dodatnia,
- [ ] b) ujemna,
- [ ] c) niewymierna.

**Zadanie 3.** W wyrażeniu $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x\sqrt{x}}\right)^{12}$ wyraz nie zawierający $x$ jest:

- [ ] a) parzysty,
- [ ] b) podzielny przez 11,
- [ ] c) podzielny przez 10.

**Zadanie 4.** Na boku $BC$ trójkąta równobocznego $ABC$ wybrano punkt $P$ taki, że $|BP| = \frac{1}{4}|PC|$. Zatem sinus kąta $CAP$ jest:

- [ ] a) równy $\frac{2\sqrt{7}}{7}$,
- [ ] b) większy niż $\frac{1}{2}$,
- [ ] c) mniejszy niż $0,9$.

**Zadanie 5.** Punkty $K$ i $L$ są odpowiednio środkami boków $AB$ i $CD$ czworokąta $ABCD$. Zatem:

- [ ] a) $2\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KC}$,
- [ ] b) $2\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$,
- [ ] c) $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB})$.

**Zadanie 6.** Jeśli $n \in \mathbb{N}$, to liczba $3^n + 3^{n+3} + 2^{n+2}$ jest:

- [ ] a) podzielna przez 4,
- [ ] b) złożona,
- [ ] c) parzysta.

**Zadanie 7.** Działanie $\otimes$ jest zdefiniowane w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych w następujący sposób $x \otimes y = x^2y - y^2x$. Rozwiązaniem równania $(a+1)\otimes(a-1) = 6$ jest liczba:

- [ ] a) 2,
- [ ] b) $-2$,
- [ ] c) 4.

**Zadanie 8.** Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $d$, a jego pole powierzchni całkowitej jest równe $S$. Suma długości wszystkich krawędzi tego graniastosłupa jest:

- [ ] a) równa $S + d^2$,
- [ ] b) równa $4\sqrt{S + d^2}$,
- [ ] c) większa niż $4d$.

**Zadanie 9.** Liczba $\binom{2013}{2013} + \binom{2013}{2012} + \binom{2013}{2011} + \ldots + \binom{2013}{2} + 2014$:

- [ ] a) ma 2014 różnych dzielników,
- [ ] b) jest liczbą pierwszą,
- [ ] c) jest liczbą nieparzystą.

**Zadanie 10.** Suma miar kątów wewnętrznych wielokąta wypukłego wynosi $3060^o$. Wielokąt ten ma:

- [ ] a) parzystą ilość przekątnych,
- [ ] b) mniej niż 200 przekątnych,
- [ ] c) więcej niż 100 przekątnych.

**Zadanie 11.** Przekształcenie płaszczyzny określone wzorem
$F((x, y)) = ((a^2 - 3)x, (a^2 - 3)y)$ jest przekształceniem izometrycznym dla:

- [ ] a) $a = \sqrt{2}$,
- [ ] b) $a = 2$,
- [ ] c) $a = -\sqrt{2}$.

**Zadanie 12.** Liczb naturalnych pięciocyfrowych, których suma cyfr po podzieleniu przez 45 daje resztę 3 jest:

- [ ] a) więcej niż 20,
- [ ] b) więcej niż 30,
- [ ] c) więcej niż 40.

**Zadanie 13.** Równanie $\log_2(x + a) = ax$, gdzie $a \leqslant 0$:

- [ ] a) ma zawsze jedno rozwiązanie,
- [ ] b) dla pewnych $a$ ma dwa rozwiązania,
- [ ] c) dla $a = 0$ jest sprzeczne.

**Zadanie 14.** Ciąg $(a_n)$ określony jest wzorem

$$a_n = \sqrt[n]{\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n}}.$$

Dla $n \in \mathbb{N}_+$ jest on ciągiem:

- [ ] a) arytmetycznym,
- [ ] b) stałym,
- [ ] c) zbieżnym.

**Zadanie 15.** Funkcja $f$ określona wzorem $f(x) = 2x^5 + 4x^3 + 2x - 1$:

- [ ] a) ma dokładnie jedno miejsce zerowe,
- [ ] b) ma więcej niż jedno miejsce zerowe,
- [ ] c) jest funkcją nieparzystą.

**Zadanie 16.** Dane są trzy zdania $p, q, r$. Prawdziwe jest zdanie:

- [ ] a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$,
- [ ] b) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q))$,
- [ ] c) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

**Zadanie 17.** Do miasta, w którym są 4 hotele, przyjechało pewnego dnia 12 turystów z Chełma. Załóżmy, że każdy turysta losowo wybiera hotel, w którym będzie nocował. Prawdopodobieństwo, że w każdym hotelu zamieszkają po 3 osoby z Chełma (z tej grupy turystów) jest:

- [ ] a) większe niż $\frac{1}{10}$,
- [ ] b) większe niż $\frac{2}{10}$,
- [ ] c) większe niż $\frac{3}{10}$.

**Zadanie 18.** Równanie $\frac{3}{2}x^2 - 2xy - 2y^2 = 0$ opisuje na płaszczyźnie:

- [ ] a) hiperbolę,
- [ ] b) elipsę,
- [ ] c) dwie proste.

**Zadanie 19.** Równanie dwusiecznej kątów zawartych między prostymi $2x + 2y + 7 = 0$ i $7x + y - 4 = 0$ jest postaci:

- [ ] a) $4x - 8y - 43 = 0$,
- [ ] b) $24x + 12y + 27 = 0$,
- [ ] c) $2x - 4y - 21 = 0$.

**Zadanie 20.** Rozwiązaniem równania $\sin^{2013} x - \cos^{2013} x = 1$ jest:

- [ ] a) każda liczba rzeczywista,
- [ ] b) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,
- [ ] c) $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

## ZADANIA OTWARTE

1. Wykaż, że jeśli $x > y$ i $y = \frac{1}{x}$, to $8(x - y)^2 \leqslant (x^2 + y^2)^2$.

2. Dane są punkty $A(-2, -1)$ i $B(-2, -5)$. Znajdź na osi $OX$ taki punkt $P$, a na osi $OY$ punkt $Q$, aby długość łamanej $APQB$ była najmniejsza.

## 4.5 11 kwietnia 2014

**Zadanie 1.** Liczb naturalnych $n$ dla których liczba $n^4 + n^2 + 1$ jest liczbą pierwszą jest:

☐ a) więcej niż dwie,
☐ b) więcej niż trzy,
☐ c) więcej niż cztery.

**Zadanie 2.** Liczbą złożoną jest:

☐ a) $2^{2014} + 5^{2012}$,
☐ b) $4^{15} + 15^4$,
☐ c) $2^{14} + 5^8$.

**Zadanie 3.** W trapezie równoramiennym $ABCD$ wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego ma długość $a$ i dzieli dłuższą podstawę na odcinki, z których dłuższy ma długość $b$. Pole tego trapezu jest równe:

☐ a) $\frac{a+b}{2}$,
☐ b) $ab$,
☐ c) $\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}$.

**Zadanie 4.** Pewien wielokąt wypukły ma 54 przekątne. Zatem suma kątów wewnętrznych tego wielokąta jest:

☐ a) mniejsza niż $2000°$,
☐ b) mniejsza niż $1900°$,
☐ c) mniejsza niż $1800°$.

**Zadanie 5.** Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nie ma miejsc zerowych i $x, y \in \mathbb{R}$ spełnia równanie $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$. Prawdą jest, że:

☐ a) $f(0) < 1$,
☐ b) $f(0) > 0$,
☐ c) $f(0) = 1$.

**Zadanie 6.** Wykres funkcji $f(x) = ||x-1|-2| + ||x-2|-1|$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, ma z osią odciętych:

☐ a) dokładnie jeden punkt wspólny,
☐ b) nieskończenie wiele punktów wspólnych,
☐ c) cztery punkty wspólne.

**Zadanie 7.** Elementów zbioru $A = \{144, 10404, 1004004, 100040004, 10000400004, 1000004000004\}$, które są kwadratem liczby naturalnej jest:

☐ a) 3,
☐ b) 4,
☐ c) 5.

**Zadanie 8.** Jeżeli $a + b = 1$, to:

☐ a) $2a^2 + 2b^2 \geqslant 1$,
☐ b) $4a^3 + 4b^3 \geqslant 1$,
☐ c) $4ab = 1$.

**Zadanie 9.** Rozwiązaniem równania $x^{\log 4} = 2 + 2^{\log x}$ jest:

☐ a) liczba parzysta,
☐ b) kwadrat pewnej liczby naturalnej,
☐ c) liczba niewymierna.

**Zadanie 10.** Funkcja $f$ jest funkcją parzystą. Zatem:

☐ a) funkcja $g(x) = x + f(x)$ jest nieparzysta,
☐ b) funkcja $g(x) = x \cdot f(x)$ jest nieparzysta,
☐ c) funkcja $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ jest nieparzysta.

**Zadanie 11.** Suma cyfr liczby $999999^3$ jest:

☐ a) liczbą nieparzystą,
☐ b) liczbą podzielną przez 6,
☐ c) liczbą większą niż 100.

**Zadanie 12.** Liczb $n$-cyfrowych o sumie cyfr równej 3 jest:

☐ a) $n$,
☐ b) $n!$,
☐ c) $\frac{1}{2}n(n+1)$.

**Zadanie 13.** Podstawy trapezu mają długość $a$ i $b$, $(a > b)$. Długość odcinka równoległego do nich i dzielącego trapez na dwie figury o równych polach wynosi:

☐ a) $\frac{a+b}{2}$,
☐ b) $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{2}}$,
☐ c) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

**Zadanie 14.** Wiadomo, że $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 5$ oraz kąt między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$ ma miarę $\frac{2}{3}\pi$. Długość wektora $5\vec{u} - 4\vec{v}$ jest równa:

☐ a) $10\sqrt{7}$,
☐ b) $7\sqrt{10}$,
☐ c) 10.

**Zadanie 15.** Równanie $x^3 - 10x + 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$:

☐ a) ma trzy rozwiązania,
☐ b) ma jedno rozwiązanie,
☐ c) nie ma rozwiązania.

**Zadanie 16.** Liczba $\left(\frac{\sin 1^\circ \cdot \cos 16^\circ \cdot \cos 8^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \cos 1^\circ}{\sin 32^\circ}\right)^{-1}$ jest liczbą:

☐ a) wymierną,
☐ b) całkowitą,
☐ c) naturalną.

**Zadanie 17.** Powierzchnia boczna stożka po rozcięciu wzdłuż tworzącej i rozłożeniu na płaszczyźnie jest wycinkiem koła o kącie, którego miara jest równa $120^\circ$. Przekrojem osiowym tego stożka jest trójkąt:

☐ a) ostrokątny,
☐ b) równoboczny,
☐ c) prostokątny.

**Zadanie 18.** Liczba wszystkich rosnących ciągów pięciowyrazowych o wyrazach należących do zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 2014\}$ jest równa:

☐ a) $\frac{2014!}{5!}$,
☐ b) $\binom{2014}{5}$,
☐ c) $\binom{2014}{2009}$.

**Zadanie 19.** Liczba wszystkich dzielników naturalnych liczby $2014 \cdot 4 \cdot 11$ jest liczbą:

☐ a) parzystą,
☐ b) podzielną przez 10,
☐ c) podzielną przez 16.

**Zadanie 20.** Równanie $[[x] - x] = -1$, gdzie $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od liczby $x$:

☐ a) nie ma rozwiązania,
☐ b) ma nieskończenie wiele rozwiązań,
☐ c) ma dokładnie 2014 rozwiązań.

## ZADANIA OTWARTE

1. Oblicz maksymalne pole trapezu, którego trzy boki mają długość 1.
2. Oblicz $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + 100 \cdot 101$.

## 4.6 10 kwietnia 2015

**Zadanie 1.** Jeśli $x + y + 1 = 0$, to największą wartością wyrażenia $x^3 + y^3 - xy$ jest:

- a) 1,
- b) 0,
- c) $-\frac{1}{2}$.

**Zadanie 2.** Kwadratem liczby naturalnej nie może być:

- a) suma kwadratów trzech kolejnych liczb parzystych,
- b) suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych,
- c) suma kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych,

**Zadanie 3.** Nie jest prawdą, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a$, $b$:

- a) $|a + b| + |a - b| \geqslant |a| + |b|$,
- b) $|a - b| \leqslant |a| - |b|$,
- c) $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$.

**Zadanie 4.** Liczby $2a$ i $2b$ są dwoma różnymi pierwiastkami równania $x^2 + ax + b = 0$. Wynika z tego, że:

- a) $a - b = \frac{5}{8}$,
- b) $a^2 + b^2 = \frac{13}{64}$,
- c) $a^3 + b^3 = 8$.

**Zadanie 5.** Niech $r$ i $R$ oznaczają odpowiednio promień okręgu wpisanego i opisanego na ośmiokącie foremnym o boku $a$. Prawdą jest, że:

- a) $r = \frac{3}{2}a$,
- b) $R = (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})a$,
- c) $\frac{R}{r} = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$.

**Zadanie 6.** Rozwiązaniem równania $|x^4 - 4x^2 + 4| = |2x^2 + 4\sqrt{2}x + 4|$ jest liczba:

- a) $\frac{3+2\sqrt{11}}{5}$,
- b) $\sqrt{2}$ ,
- c) $-\sqrt{2}$.

**Zadanie 7.** Wielomian $W(x) = nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1$ jest podzielny przez:

- a) $x - 1$,
- b) $x + 1$,
- c) $(x - 1)^2$.

**Zadanie 8.** Funkcja liniowa $f$ spełnia warunki $f\left(2^{2014} + x\right) = 2^{2015} + x$. Prawdą jest, że:

- a) $f(0) = 2^{2015}$,
- b) $f(0) > 3^{1000}$,
- c) $f(2014) < f(2015)$.

**Zadanie 9.** Wyrazem rozwinięcia dwumianu $\left(\frac{2}{x}+\sqrt[3]{x}\right)^{12}$, w którym nie występuje $x$ jest:

☐ a) $\binom{12}{9}\cdot 2^3$,

☐ b) 1760,

☐ c) $\binom{12}{3}\cdot 2^9$.

**Zadanie 10.** Liczby naturalne $x$ i $y$ są rozwiązaniem równania $1-\frac{3}{y}-\frac{2}{x}+\frac{1}{x\cdot y}=0$. Zatem:

☐ a) $|x-y|=5$,

☐ b) $|x^2-y^2|=50$,

☐ c) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=100$.

**Zadanie 11.** Granicą ciągu $a_n=\frac{b_{n+1}-b_n}{b_{n+1}+b_n}$, gdzie $b_n=(2n)!$, $n=1,2,\ldots$ jest:

☐ a) liczba naturalna,

☐ b) liczba całkowita,

☐ c) liczba wymierna.

**Zadanie 12.** Dane jest wyrażenie $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}$. Jeśli $n$ zwiększymy dwukrotnie, to wartość tego wyrażenia:

☐ a) wzrośnie dwukrotnie,

☐ b) nie zmieni się,

☐ c) wzrośnie czterokrotnie.

**Zadanie 13.** Wiadomo, że $2^x-2^{-x}=3$. Zatem:

☐ a) $4^x+4^{-x}=10$,

☐ b) $8^x-8^{-x}=27$,

☐ c) $32^x-32^{-x}=243$.

**Zadanie 14.** Wartość wyrażenia $\sin^2 10^o\cdot\sin^2 50^o\cdot\sin^2 70^o$ jest :

☐ a) mniejsza niż $\frac{1}{4}$,

☐ b) mniejsza niż $\frac{1}{8}$,

☐ c) mniejsza niż $\frac{1}{64}$.

**Zadanie 15.** Długość wektora $\vec{w}=6\vec{u}-8\vec{v}$, gdzie $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są wektorami o długości 1 wzajemnie prostopadłymi jest:

☐ a) równa 2,

☐ b) większa od 8,

☐ c) mniejsza od 9.

**Zadanie 16.** Ze środkowych trójkąta o polu $S$ zbudowano trójkąt o polu $P$. Zatem:

☐ a) $P<80\%S$,

☐ b) $P=75\%S$,

☐ c) $P<75\%S$.

**Zadanie 17.** Prostą równoległą do prostej o równaniu $3x - 4y + 2 = 0$ i odległą od niej o 3 jest prosta:

- [ ] a) $3x - 4y + 17 = 0$,
- [ ] b) $3x - 4y + 5 = 0$,
- [ ] c) $3x - 4y - 13 = 0$.

**Zadanie 18.** Niech $f(x) = x|x-1|$. Pochodna funkcji $f$ w punkcie $x_0 = 1$:

- [ ] a) jest równa 1,
- [ ] b) nie istnieje,
- [ ] c) jest liczbą dodatnią.

**Zadanie 19.** Liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie występują dokładnie dwie cyfry nieparzyste jest:

- [ ] a) $189 \cdot 5^9$,
- [ ] b) $\binom{5}{2} \cdot 5^8$,
- [ ] c) mniej niż $5^{10}$.

**Zadanie 20.** Równanie $\left(\frac{1}{16}\right)^x = \log_{\frac{1}{16}} x$ ma:

- [ ] a) mniej niż cztery rozwiązania,
- [ ] b) mniej niż trzy rozwiązania,
- [ ] c) jedno rozwiązanie.

## ZADANIA OTWARTE

1. Z urny zawierającej jedną kulę oznaczoną numerem 1, dwie kule oznaczone numerem 2, trzy kule oznaczone numerem 3, ..., dwa tysiące piętnaście kul oznaczonych numerem 2015 wyciągamy bez zwracania dwie kule. Jakie jest prawdopodobieństwo, że obie kule mają ten sam numer?

2. Do rzeki o szerokości $r$ wpada pod kątem prostym kanał o szerokości $k$. Jaka jest największa długość drewnianej belki, która może wpłynąć z kanału do rzeki? (Uwaga: pomijamy grubość belki)

## 4.7 8 kwietnia 2016

**Zadanie 1.** Czwartą cyfrą po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby $\pi$ jest:

- [ ] a) 1,
- [ ] b) 3,
- [ ] c) 5.

**Zadanie 2.** Do przedziału $(70, 80)$ należy:

- [ ] a) mniej niż pięć liczb pierwszych,
- [ ] b) mniej niż cztery liczby pierwsze,
- [ ] c) mniej niż trzy liczby pierwsze.

**Zadanie 3.** Rozwinięcie dwumianu $\left(\sqrt[3]{2016^2} + \frac{1}{\sqrt[4]{2016^3}}\right)^{60}$ zawiera:

- [ ] a) mniej niż pięć wyrazów wymiernych,
- [ ] b) mniej niż cztery wyrazy wymierne,
- [ ] c) mniej niż trzy wyrazy wymierne.

**Zadanie 4.** Różnym literom odpowiadają różne cyfry. Jeśli $P \cdot W \cdot S \cdot Z = 2016$, to:

- [ ] a) $P^2 + W^2 + S^2 + Z^2 > 200$,
- [ ] b) $(P + W + S + Z)! > 30^{30}$,
- [ ] c) $P + W - S - Z = 0$.

**Zadanie 5.** Prawdą jest, że:

- [ ] a) $\lim\limits_{x\to 1^+} 2016^{\frac{2}{x-1}} = +\infty$,
- [ ] b) $\lim\limits_{x\to 1^-} 2016^{\frac{2}{x-1}} = -\infty$,
- [ ] c) $\lim\limits_{x\to 1} 2016^{\frac{2}{x-1}} = 1$.

**Zadanie 6.** W trapez równoramienny o podstawach $a$ i $b$ wpisano koło:

- [ ] a) pole tego koła jest równe $\frac{\pi}{4}ab$,
- [ ] b) obwód tego koła jest równy $2\pi ab$,
- [ ] c) średnica tego koła ma długość $\frac{a+b}{2}$.

**Zadanie 7.** Równanie $x^2 + px + q = 0$ ma dwa różne pierwiastki, którymi są liczby $2p$ i $2q$. Zatem:

- [ ] a) $pq = -\frac{1}{16}$,
- [ ] b) $pq < 0$,
- [ ] c) $pq = -\frac{3}{32}$.

**Zadanie 8.** Równanie $x^{2016} + \frac{1}{x^{2016}} = 1 + x^{2017}$ ma:

- [ ] a) dokładnie jedno rozwiązanie,
- [ ] b) więcej niż jedno rozwiązanie,
- [ ] c) 2016 różnych rozwiązań.

**Zadanie 9.** Moneta o średnicy 1 cm toczy się po obwodzie dziesięciokąta foremnego o boku 1 cm tak długo, aż powróci do położenia początkowego. Droga, którą zakreśli środek monety ma długość:

- [ ] a) większą niż 12 cm,
- [ ] b) większą niż 13 cm,
- [ ] c) większą niż 14 cm.

**Zadanie 10.** Równanie $y^2 + 4x^2 = 4xy + 2x - y$ opisuje na płaszczyźnie:

- [ ] a) parabolę,
- [ ] b) dwie proste,
- [ ] c) dwie proste równoległe.

**Zadanie 11.** Liczba $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ jest liczbą:

- [ ] a) całkowitą,
- [ ] b) parzystą,
- [ ] c) pierwszą.

**Zadanie 12.** Dla każdej liczby rzeczywistej $x$ prawdziwa jest nierówność:

- [ ] a) $2x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 2016 > 0$,
- [ ] b) $2x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 100 > 0$,
- [ ] c) $2x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 1 > 0$.

**Zadanie 13.** Polem rombu o obwodzie $4k$ nie może być:

- [ ] a) $\frac{1}{4}k^2$,
- [ ] b) $\sqrt{2}k^2$,
- [ ] c) $\frac{\pi k^2}{4}$.

**Zadanie 14.** Funkcja $f$ dana jest wzorem $f(x) = 1 + \cos x + \cos 2x$, gdzie $x \in \mathbb{R}$. Zatem:

- [ ] a) najmniejszą wartością funkcji $f$ jest $-1$,
- [ ] b) największą wartością funkcji $f$ jest 3,
- [ ] c) zbiorem wartości funkcji $f$ jest przedział $\langle -\frac{1}{8}, 3\rangle$.

**Zadanie 15.** Ciąg $(a_n)$ dany jest wzorem $a_n = \frac{n^3+4}{n+2}$. Liczba wyrazów całkowitych tego ciągu jest:

- [ ] a) większa od 5,
- [ ] b) większa od 6,
- [ ] c) większa od 2016.

**Zadanie 16.** Liczba $\log_{16}(2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{2016})$ jest:

- [ ] a) parzysta,
- [ ] b) całkowita,
- [ ] c) wymierna.

**Zadanie 17.** Część wspólna sześcianu i płaszczyzny może być:

☐ a) pięciokątem,
☐ b) sześciokątem foremnym,
☐ c) trójkątem rozwartokątnym.

**Zadanie 18.** Dany jest sześcian $ABCDA'B'C'D'$ o krawędzi długości 1. Odległość pomiędzy prostymi $A'B$ i $B'C$ jest:

☐ a) większa niż $\frac{\sqrt{2}}{3}$,
☐ b) większa niż $\frac{\sqrt{3}}{3}$,
☐ c) równa $\frac{1}{3}$.

**Zadanie 19.** Liczb siedmiocyfrowych będących wielokrotnością liczby 3, których każda cyfra to 1, 5 albo 9 jest:

☐ a) więcej niż 500,
☐ b) więcej niż 700,
☐ c) więcej niż 900.

**Zadanie 20.** Przy okrągłym stole zasiada losowo 10 osób, a wśród nich rodzice z dwójką dzieci. Prawdopodobieństwo tego, że dzieci usiądą bezpośrednio między rodzicami jest:

☐ a) mniejsze niż 0,01,
☐ b) większe niż 0,001,
☐ c) równe $\frac{4}{10!}$.

## ZADANIA OTWARTE

1. Niech $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2016}$ będą liczbami dodatnimi takimi, że ich suma jest równa 1. Wykaż, że

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{2016}} \geqslant 2016^2 \; .$$

2. Wewnątrz trójkąta $ABC$ o polu równym $\frac{1}{4}$ zaznaczono punkt $P$. Wykaż, że

$$|PA| \cdot |BC| + |PB| \cdot |AC| + |PC| \cdot |AB| \geqslant 1 \; .$$

## 4.8 30 marca 2017

**Zadanie 1.** Dane są dwa zdania:

$p$ - suma dwóch liczb niewymiernych jest liczbą niewymierną,

$q$ - kwadrat liczby niewymiernej jest liczbą wymierną.

Prawdziwe jest wyrażenie:

☐ a) $(p \vee q) \Rightarrow p$,
☐ b) $p \Rightarrow (\sim q)$,
☐ c) $(\sim p) \Rightarrow q$.

**Zadanie 2.** Równanie $x^{x\sqrt{x}} = (x\sqrt{x})^x$ ma:

☐ a) więcej niż jedno rozwiązanie,
☐ b) więcej niż dwa rozwiązania,
☐ c) więcej niż trzy rozwiązania.

**Zadanie 3.** Funkcją okresową nie jest funkcja:

☐ a) $f(x) = \cos(\sqrt{2}x) + \cos x$,
☐ b) $f(x) = \cos(\sqrt{3}x) + \cos x$,
☐ c) $f(x) = \cos(\sqrt{4}x) + \cos x$.

**Zadanie 4.** Równanie $x^2 = 2xy - 2y + x$ opisuje na płaszczyźnie:

☐ a) hiperbolę,
☐ b) dwie proste,
☐ c) parabolę.

**Zadanie 5.** Liczba $13^n + 8$ jest podzielna przez 7 dla:

☐ a) $n = 2016$,
☐ b) $n = 2017$,
☐ c) $n = 2018$.

**Zadanie 6.** Z cyfr 1, 2, 8, 9 utworzono wszystkie możliwe liczby czterocyfrowe o różnych cyfrach. Suma tych liczb jest:

☐ a) większa niż 100000,
☐ b) większa niż 120000,
☐ c) większa niż 140000.

**Zadanie 7.** Prawdą jest, że:

☐ a) $\sin^2 70° \cdot \sin^2 50° \cdot \sin^2 10° = \frac{1}{64}$,
☐ b) $\sin \frac{3\pi}{10} - \sin \frac{\pi}{10} = \frac{1}{2}$,
☐ c) $\sin 20° \cdot \sin 40° \cdot \sin 60° \cdot \sin 80° = \frac{3}{16}$.

**Zadanie 8.** Ciąg $(a_n)$ jest ciągiem geometrycznym zbieżnym o ilorazie $q$ i sumie wyrazów $S$. Wtedy ciąg $(a_n^2)$ ma sumę równą:

☐ a) $S^2$,
☐ b) $a_1 \cdot q^2 \cdot S^2$,
☐ c) $\frac{a_1}{1+q}S$.

**Zadanie 9.** Wielomian $W(x) = x^3 + 3ax^2 + 4a^2x - 3$, gdzie $a \in \mathbb{R}$:

☐ a) ma dla każdego $a < 0$ tylko jedno miejsce zerowe,
☐ b) może mieć dokładnie trzy różne miejsca zerowe,
☐ c) może mieć dokładnie dwa różne miejsca zerowe.

**Zadanie 10.** Każdą z liczb ze zbioru $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2017\}$ mnożymy przez każdą z liczb ze zbioru $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Suma wszystkich iloczynów otrzymanych w ten sposób jest:

☐ a) większa niż $10^8$,
☐ b) liczbą podzielną przez 2017,
☐ c) liczbą pierwszą.

**Zadanie 11.** Dane są zbiory $A, B \subset \Omega$. Jeśli $P(A') = 0{,}5$, $P(B') = 0{,}5$ i $P(A \cup B) = 0{,}6$, to:

☐ a) $P(A' \cup B') = 0,6$,
☐ b) $P(A \setminus B) = 0,2$,
☐ c) $P(B \setminus A) = 0,1$.

**Zadanie 12.** Niech $p > 3$. Liczby $p$ i $10p + 1$ są pierwsze. Zatem liczbą pierwszą nie jest liczba:

☐ a) $14p + 1$,
☐ b) $8p + 1$,
☐ c) $5p + 1$.

**Zadanie 13.** Ciąg $(a_n)$ określony wzorem $a_n = \sqrt[n]{\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1} + \ldots + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}}$ dla $n \in \mathbb{N}_+$ jest ciągiem:

☐ a) zbieżnym,
☐ b) arytmetycznym,
☐ c) geometrycznym.

**Zadanie 14.** Liczba wszystkich dzielników naturalnych liczby $2016^{2017}$ jest liczbą:

☐ a) podzielną przez 5,
☐ b) parzystą,
☐ c) podzielną przez 2018.

**Zadanie 15.** Równanie $x^2 + \log_3 x = 1$ ma:

☐ a) dokładnie jedno rozwiązanie,
☐ b) więcej niż jedno rozwiązanie,
☐ c) mniej niż dwa rozwiązania.

**Zadanie 16.** Funkcja $f$ jest parzysta i $f'(3) = 7$. Wynika stąd, że:

☐ a) $f'(-3) = 7$,
☐ b) $f'(-3) = -7$,
☐ c) $f'(0) = 0$.

**Zadanie 17.** Na ile sposobów można wybrać trzy pola na szachownicy $8 \times 8$, aby żadne dwa z wybranych pól nie leżały ani w jednym wierszu, ani w jednej kolumnie:

☐ a) $56^2 \cdot 6$,
☐ b) $\binom{8}{3} \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$,
☐ c) $8! \cdot 3!$.

**Zadanie 18.** Punkty $K$, $L$, $M$, $N$ są odpowiednio środkami boków $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ równoległoboku $ABCD$ o polu 20. Pole czworokąta ograniczonego prostymi $AM$, $BN$, $CK$, $DL$ jest:

☐ a) mniejsze niż 6,
☐ b) mniejsze niż 5,
☐ c) mniejsze niż 4.

**Zadanie 19.** Z dowolnego punktu $P$ wewnątrz danego kąta ostrego o wierzchołku $W$ opuszczono na ramiona prostopadłe $PA$ i $PB$. Z punktu $W$ opuszczono prostopadłą $WK$ na odcinek $AB$. Prawdą jest, że:

☐ a) $|\sphericalangle AWK| = |\sphericalangle PWB|$,
☐ b) $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle PWB|$,
☐ c) $|\sphericalangle AWK| < |\sphericalangle BWP|$.

**Zadanie 20.** Stosunek długości środkowych trójkąta wynosi $3 : 4 : 5$. Stosunek długości boków tego trójkąta jest równy:

☐ a) $3 : 4 : 5$,
☐ b) $4 : 5 : 6$,
☐ c) $5 : 6 : 7$.

## ZADANIA OTWARTE

1. Wykaż, że jeśli punkt $P$ leży na łuku $CD$ okręgu opisanego na kwadracie $ABCD$, to
$$|PA| \cdot \Big(|PA| + |PC|\Big) = |PB| \cdot \Big(|PB| + |PD|\Big) .$$

2. Boisko ma 110 metrów długości i 67 metrów szerokości. W którym miejscu na linii bocznej boiska należy ustawić piłkę, aby szansa trafienia do bramki, która ma 7 metrów szerokości, była największa? Przyjąć, że szansa trafienia jest największa, gdy kąt widzenia bramki jest największy.

## 4.9 13 kwietnia 2018

**Zadanie 1.** Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o podstawach $AB$ i $CD$, w którym boki $AB$ i $BC$ są prostopadłe. Dwusieczne kątów przy wierzchołkach $A$ i $D$ przecinają się w punkcie $S$ leżącym na boku $BC$. Wówczas:

- [ ] a) $|BS| > |SC|$,
- [ ] b) $|BS| = \frac{3}{4}|SC|$,
- [ ] c) $|BS| = \frac{2}{3}|SC|$.

**Zadanie 2.** Równanie $\cos(\sin x) = 0$:

- [ ] a) ma nieskończenie wiele rozwiązań,
- [ ] b) ma dwa rozwiązania niewymierne,
- [ ] c) ma co najmniej jedno rozwiązanie.

**Zadanie 3.** Niech $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$. Wówczas:

- [ ] a) funkcja $f$ jest funkcją różnowartościową,
- [ ] b) istnieją dokładnie cztery punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu funkcji $f$,
- [ ] c) styczna do wykresu funkcji $f$ w punkcie $(0, -1)$ jest równoległa do prostej $3x - y + 5 = 0$.

**Zadanie 4.** Para $(x, y)$ liczb rzeczywistych spełnia równanie $3x^2+3y^2+3xy = 6y-6x-12$. Zatem:

- [ ] a) $x + y > 3$,
- [ ] b) $x + y > 1$,
- [ ] c) $x + y > -1$.

**Zadanie 5.** Niech $P$ będzie punktem wewnętrznym czworościanu foremnego o krawędzi 1, a $d$ sumą odległości punktu $P$ od wszystkich ścian czworościanu. Zatem:

- [ ] a) $d$ nie zależy od położenia punktu $P$,
- [ ] b) wysokość czworościanu ma długość $2d$,
- [ ] c) $d = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

**Zadanie 6.** Równanie $mx^2 - (4 + m^2)x + 4m = 0$ ma dwa różne pierwiastki naturalne. Zatem:

- [ ] a) $m \in (4, 8)$,
- [ ] b) $m \in \emptyset$,
- [ ] c) $m > 10$.

**Zadanie 7.** Funkcja $f$ określona jest wzorem $f(x) = 2x - |x|$. Wynika z tego, że :

- [ ] a) $f'(0) = 0$,
- [ ] b) $f'(1) = 1$,
- [ ] c) $f'(2) = 2$.

**Zadanie 8.** Czworo studentów $A, B, C, D$ wypowiedziało kolejno zdania:

$A:$ $B, C$ i $D$ to kobiety,
$B:$ $A, C$ i $D$ to mężczyźni,
$C:$ $A$ i $B$ kłamią,
$D:$ $A, B$ i $C$ mówią prawdę.

Zatem prawdę mówiło:

☐ a) dwóch studentów,
☐ b) więcej niż jeden student,
☐ c) jeden student.

**Zadanie 9.** W ubiegłym roku w konkursie im. Samuela Chróścikowskiego wzięło udział 300 osób. Pani $A_1$ znała siedmiu panów uczestniczących w konkursie, pani $A_2$ znała ośmiu panów, pani $A_3$ znała dziewięciu panów, ... , pani $A_n$ znała wszystkich panów uczestniczących w konkursie. Panów biorących udział w tym konkursie było:

☐ a) więcej niż 150,
☐ b) więcej niż 160,
☐ c) więcej niż 170.

**Zadanie 10.** Dany jest zbiór $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Liczba funkcji $f \colon A \to A$ posiadających dwuelementowy zbiór wartości jest:

☐ a) większa niż 100,
☐ b) większa niż 200,
☐ c) większa niż 300.

**Zadanie 11.** Dane są dwie różne liczby pierwsze $p$ i $q$. Liczbą niewymierną jest:

☐ a) $\sqrt{p^2 + q^2}$ ,
☐ b) $\sqrt{2p + q}$ ,
☐ c) $p^2\sqrt{q} + q^2\sqrt{p}$ .

**Zadanie 12.** Liczba NWD$(2016^{2018},\ 2018^{2016})\cdot$NWW$(2016^{2018},\ 2018^{2016})$:

☐ a) ma parzystą liczbę dzielników,
☐ b) ma mniej niż 2017 dzielników,
☐ c) jest podzielna przez 2017.

**Zadanie 13.** Liczba $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$

☐ a) jest naturalna,
☐ b) jest nieparzysta,
☐ c) jest większa niż 2.

**Zadanie 14.** Niech $A = 2018^{\sqrt{\log_{2018} 2017}}$ oraz $B = 2017^{\sqrt{\log_{2017} 2018}}$. Wtedy:

☐ a) $\frac{B}{A} = 1$,
☐ b) $A^{2017} = B^{2018}$,
☐ c) $|A - B| > 2019$.

**Zadanie 15.** Funkcja $f$ dana jest wzorem $f(x) = \frac{x}{x-1}$. Niech $f^n(x) = \underbrace{f(f(\ldots(f}_{n \text{ razy}}(x))\ldots))$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$. Wówczas dla każdego $x \neq 1$:

☐ a) $f^{2018}(x) = x$,

☐ b) $f^6(3) = 3$,

☐ c) $f^9(3) = \frac{3}{2}$.

**Zadanie 16.** Jeśli przekątna trapezu równoramiennego zawiera się w dwusiecznej jego kąta ostrego oraz stosunek dłuższej podstawy do krótszej jest równy 2, to:

☐ a) przekątna jest prostopadła do jednego z ramion,

☐ b) kąt ostry trapezu ma miarę $60°$,

☐ c) w ten trapez można wpisać okrąg.

**Zadanie 17.** Liczby $a_1$, $a_2$, $a_3$, $\ldots$, $a_{2018}$ tworzą ciąg arytmetyczny i $a_i \neq 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, 2018$. Wtedy:

☐ a) $\dfrac{1}{a_1 \cdot a_2} + \dfrac{1}{a_2 \cdot a_3} + \dfrac{1}{a_3 \cdot a_4} + \ldots + \dfrac{1}{a_{2017} \cdot a_{2018}} = \dfrac{2017}{a_1 \cdot a_{2018}}$,

☐ b) $\dfrac{1}{a_1 \cdot a_2} + \dfrac{1}{a_2 \cdot a_3} + \dfrac{1}{a_3 \cdot a_4} + \ldots + \dfrac{1}{a_{2017} \cdot a_{2018}} = \dfrac{2018}{a_1 \cdot a_{2018}}$,

☐ c) $\dfrac{1}{a_1 \cdot a_2} + \dfrac{1}{a_2 \cdot a_3} + \dfrac{1}{a_3 \cdot a_4} + \ldots + \dfrac{1}{a_{2017} \cdot a_{2018}} = \dfrac{2019}{a_1 \cdot a_{2018}}$.

**Zadanie 18.** Równanie $10^{\sin x} = x$ ma:

☐ a) nieskończenie wiele rozwiązań,

☐ b) dokładnie trzy rozwiązania,

☐ c) więcej niż trzy rozwiązania.

**Zadanie 19.** Cztery proste mogą podzielić płaszczyznę na dokładnie:

☐ a) 8 części,

☐ b) 9 części,

☐ c) 11 części.

**Zadanie 20.** Zbiór rozwiązań nierówności $(x-1)^k \cdot (x-2)^l \cdot (x-3)^m \leqslant 0$, gdzie $k, l, m \in \mathbb{N}_+$, jest zbiorem ograniczonym. Wynika stąd, że:

☐ a) liczby $k, l, m$ są parzyste,

☐ b) co najmniej jedna z liczb $k, l, m$ jest parzysta,

☐ c) liczba $k + l + m$ jest parzysta.

## ZADANIA OTWARTE

1. Dany jest sześcian $ABCDA'B'C'D'$ o krawędzi długości 1. Oblicz odległość pomiędzy prostymi $A'B$ i $B'C$ .

2. Wykaż, że liczba $a = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + 2017 \cdot 2018$ jest podzielna przez 2017.

## 4.10 5 kwietnia 2019

**Zadanie 1.** Dokładnie jedno rozwiązanie ma równanie :

a) $2019^x - 2018^x = 0$,
b) $2017^x + 2018^x + 2019^x = 0$,
c) $2020^{x-1} = \frac{1}{2019^x}$.

**Zadanie 2.** Każdy wyraz nieskończonego ciągu geometrycznego o wyrazach dodatnich jest równy sumie wyrazów następujących po nim. Wynika stąd, że iloraz tego ciągu jest równy :

a) $\frac{1}{3}$,
b) $\frac{1}{4}$,
c) $\frac{1}{5}$.

**Zadanie 3.** Jeśli $\log_{12} 72 = p$, to prawdą jest, że :

a) $\log_2 3 = \frac{2p-3}{2-p}$,
b) $\log_3 2 = \frac{2-p}{2p-3}$,
c) $\log_{72} 12 = -p$.

**Zadanie 4.** Istnieje wielomian $W$ stopnia trzeciego o współczynnikach całkowitych taki, że :

a) $W(0) = 1,\ W(1) = 2,\ W(2) = 0$,
b) $W(1) = 2,\ W(2) = 3,\ W(3) = 1$,
c) $W(2) = 3,\ W(3) = 4,\ W(4) = 2$.

**Zadanie 5.** W okrąg wpisano trójkąt równoboczny $ABC$. Na łuku $BC$ tego okręgu, nie zawierającym punktu $A$, zaznaczono taki punkt $P$, że $|CP| = 2018,\ |BP| = 1$. Długość odcinka $AP$ jest :

a) mniejsza niż 2021,
b) mniejsza niż 2020,
c) mniejsza niż 2019.

**Zadanie 6.** Naturalnych liczb dodatnich mniejszych od $10^6$ i podzielnych przez 6, które można zapisać za pomocą cyfr 0, 1, 2 jest :

a) mniej niż 200,
b) mniej niż 180,
c) mniej niż 160.

**Zadanie 7.** Układ równań $\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$ może mieć dla pewnego $a \in \mathbb{R}$ :

a) 8 rozwiązań,
b) 6 rozwiązań,
c) 4 rozwiązania.

**Zadanie 8.** Romb, którego bok ma długość $a$, zaś kąt ostry miarę $30°$, podzielono na 3 części o równych polach prostymi poprowadzonymi z wierzchołka kąta ostrego. Długość każdego z odcinków tych prostych zawartych w rombie jest :

- [ ] a) dłuższa niż $\frac{5}{3}a$ ,
- [ ] b) dłuższa niż $\frac{4}{3}a$ ,
- [ ] c) równa $a \cdot \frac{\sqrt{13+6\sqrt{3}}}{3}$ .

**Zadanie 9.** Funkcja $f(x) = x \cdot \frac{3^x-1}{3^x+1}$ jest :

- [ ] a) okresowa ,
- [ ] b) parzysta ,
- [ ] c) malejąca .

**Zadanie 10.** W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna ma długość $a$. Jeśli pole przekroju zawierającego krawędź boczną i wysokość ostrosłupa jest największe, to objętość tej bryły jest :

- [ ] a) równa $\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$ ,
- [ ] b) większa niż $\frac{1}{3}a^3$ ,
- [ ] c) równa $\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$ .

**Zadanie 11.** Zbiorem środków wszystkich cięciw paraboli $y = x^2$ przechodzących przez punkt $A(0,1)$ jest krzywa o równaniu :

- [ ] a) $y = 2x^2 + 1$ ,
- [ ] b) $y = x^2 + 1$ ,
- [ ] c) $y^2 = 2x^2 + 1$ .

**Zadanie 12.** Dwóch równorzędnych arcymistrzów $A$ i $B$ gra w szachy. Najbardziej prawdopodobne jest, że gracz $A$ wygra z graczem $B$ :

- [ ] a) dwie partie z czterech ,
- [ ] b) trzy partie z sześciu ,
- [ ] c) cztery partie z ośmiu .

**Zadanie 13.** Funkcja $f(x) = \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} x$ :

- [ ] a) jest funkcją rosnącą ,
- [ ] b) ma nieskończenie wiele miejsc zerowych ,
- [ ] c) nie przyjmuje wartości ujemnych .

**Zadanie 14.** Funkcja $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx + d$, gdzie $a \neq 0$, jest malejąca. Wynika stąd, że :

- [ ] a) $a < 0$ ,
- [ ] b) $b < 0$ ,
- [ ] c) $c \leqslant 0$ .

**Zadanie 15.** Funkcja $f(x) = \sin(3 + \cos 2019x)$ :

☐ a) jest okresowa ,
☐ b) ma nieskończenie wiele miejsc zerowych ,
☐ c) przyjmuje tylko wartości ujemne .

**Zadanie 16.** Równanie $x^{2019} = \sin x$ ma :

☐ a) dwa rozwiązania ,
☐ b) nieskończenie wiele rozwiązań ,
☐ c) 2019 rozwiązań .

**Zadanie 17.** Liczba $a = \cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}$. Prawdą jest, że :

☐ a) $\sqrt[3]{a} = \frac{1}{2}$ ,
☐ b) $16a > \log_3 10$ ,
☐ c) $a = \cos\frac{2}{3}\pi$ .

**Zadanie 18.** Dany jest ciąg $a_n = \frac{n^2+1}{n+1}$. Wyrazów tego ciągu, które są liczbami naturalnymi jest :

☐ a) więcej niż 100 ,
☐ b) więcej niż 10 ,
☐ c) więcej niż 1 .

**Zadanie 19.** Liczby $x$ i $y$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi takimi, że $x > y$ i $xy = 1$. Wynika stąd, że :

☐ a) $\frac{x^2+y^2}{x-y} \geqslant 2\sqrt{2}$ ,
☐ b) $\frac{x^2+y^2}{x-y} \geqslant 2\sqrt{3}$ ,
☐ c) $\frac{x^2+y^2}{x-y} \geqslant 4$ .

**Zadanie 20.** Liczby $a$ i $b$ są takimi liczbami całkowitymi, że liczba $a^2 + 5ab + b^2$ dzieli się przez 7. Wynika stąd, że przez 7 dzieli się również liczba :

☐ a) $a - b$ ,
☐ b) $a^2 - 2ab + b^2$ ,
☐ c) $a^3 - b^3$ .

## ZADANIA OTWARTE

1. Pokaż, że liczba $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + 2018 \cdot 2018!$ jest mniejsza niż $2019!$ .

2. W kwadracie $PQRS$ o polu równym 2019 połączono wierzchołek $P$ ze środkiem boku $QR$, wierzchołek $Q$ ze środkiem boku $RS$, wierzchołek $R$ ze środkiem boku $SP$ i wierzchołek $S$ ze środkiem boku $PQ$. Oblicz pole tej części kwadratu w której leży środek okręgu na nim opisanego.

## 4.11 16 kwietnia 2021

**Zadanie 1.** Różnym literom odpowiadają różne cyfry.
Jeśli $PW \cdot PW \cdot PWP \cdot PWP \cdot S = 2020^2$, to:

a) $P + W + S = P \cdot W$,

b) $P \cdot S = W + S$,

c) $P \cdot W \cdot S = W^2$.

**Zadanie 2.** Równanie $x^5 + x^2 + 2 = 0$ :

a) ma jedno rozwiązanie,

b) ma więcej niż jedno rozwiązanie,

c) jest sprzeczne.

**Zadanie 3.** Część całkowita liczby $\log_2 2020 + \log_{2020} 2048$ nie jest:

a) liczbą pierwszą,

b) liczbą nieparzystą,

c) liczbą podzielną przez 2.

**Zadanie 4.** Liczby $a$ i $b$ są takimi liczbami całkowitymi, że liczba $5a + 4b$ jest wielokrotnością 57. Prawdą jest, że:

a) $15a + 12b$ jest wielokrotnością 57,

b) $7a + 17b$ jest wielokrotnością 57,

c) $67a + 65b$ jest wielokrotnością 57.

**Zadanie 5.** Wszystkich par $(n, m)$ liczb naturalnych spełniających równanie $1! + 2! + 3! + \ldots + n! = m^2$ jest :

a) nieskończenie wiele,

b) więcej niż 5,

c) mniej niż 3.

**Zadanie 6.** Równanie $\left[\frac{3x+19}{20}\right] = x$, gdzie $[\cdot]$ oznacza część całkowitą liczby:

a) ma mniej niż trzy rozwiązania,

b) ma mniej niż dwa rozwiązania,

c) jest sprzeczne.

**Zadanie 7.** W sadzie zbierano jabłka, których było nie więcej niż 1000. Gdyby podzielić je równo do 7 koszy, to zostanie 1 jabłko; do 13 koszy, to zostanie 6 jabłek. Zebrane jabłka można też podzielić po równo do 11 koszy. Zebrano zatem :

a) więcej niż 200 jabłek,

b) więcej niż 300 jabłek,

c) więcej niż 400 jabłek.

**Zadanie 8.** Różnych par liczb całkowitych $(x, y)$ spełniających równanie $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$, gdzie $p$ jest liczbą pierwszą, jest :

- [ ] a) więcej niż trzy ,
- [ ] b) więcej niż cztery ,
- [ ] c) więcej niż pięć .

**Zadanie 9.** W pewien 2020-ścian wpisano kulę o promieniu 1. Pole powierzchni całkowitej tego wielościanu wynosi 300. Objętość wielościanu jest :

- [ ] a) większa niż 100 ,
- [ ] b) większa niż 2020 ,
- [ ] c) mniejsza niż 100 .

**Zadanie 10.** Dla dowolnych liczb dodatnich $a$, $b$ i $c$ prawdziwa jest nierówność :

- [ ] a) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$ ,
- [ ] b) $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant a^2b + b^2c + c^2a$ ,
- [ ] c) $a^3b + b^3c + c^3a \leqslant a^2bc + b^2ca + c^2ab$ .

**Zadanie 11.** Dwie ostatnie cyfry liczby $999^{999}$ to :

- [ ] a) 89 ,
- [ ] b) 79 ,
- [ ] c) 61 .

**Zadanie 12.** Różnych liczb 2020-cyfrowych, które są zapisane za pomocą dwóch różnych cyfr jest :

- [ ] a) więcej niż $81 \cdot 2^{2019}$ ,
- [ ] b) więcej niż $81 \cdot 2^{2019} - 81$ ,
- [ ] c) więcej niż $2^{2020}$ .

**Zadanie 13.** Równanie $\min(x^2, x + 2) = \max(|x|, 1)$ ma :

- [ ] a) mniej niż dwa rozwiązania ,
- [ ] b) mniej niż trzy rozwiązania ,
- [ ] c) mniej niż cztery rozwiązania .

**Zadanie 14.** Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i różnowartościowa. Wynika stąd, że :

- [ ] a) pochodna funkcji $f$ nie ma miejsc zerowych ,
- [ ] b) funkcja $f$ jest rosnąca lub malejąca ,
- [ ] c) $f'(2019) \cdot f'(2020) \geqslant 0$ .

**Zadanie 15.** Sumą dwóch prostych jest zbiór punktów $(x, y)$ spełniających równanie :

- [ ] a) $xy + 2020 = 2020x + y$ ,
- [ ] b) $x^2 + 4y^2 = 2020 + 4xy$ ,
- [ ] c) $x^2 + 2020y^2 = 2021xy$ .

**Zadanie 16.** Ciąg $(a_n)$ określony jest wzorem $a_n = n^{(-2020)^n}$. Prawdą jest, że:

- [ ] a) ciąg $a_n$ jest rozbieżny do $+\infty$,
- [ ] b) ciąg $a_n$ jest ograniczony z dołu,
- [ ] c) ciąg $a_n$ jest ciągiem geometrycznym.

**Zadanie 17.** Figura złożona z punktów $(x, y)$, których współrzędne spełniają równanie

$$\log_{2020x} y \cdot \log_y 2020x = 1$$

jest:

- [ ] a) figurą nieograniczoną,
- [ ] b) figurą wypukłą,
- [ ] c) półpłaszczyzną.

**Zadanie 18.** Zbiorem wartości funkcji $f(x) = \frac{2020}{\cot x + \tan x}$ jest zbiór:

- [ ] a) $\langle -1010, 1010 \rangle$,
- [ ] b) $\langle -2020, 2020 \rangle$,
- [ ] c) $\mathbb{R}$.

**Zadanie 19.** Rzucamy 2020 razy kostką do gry i dodajemy liczby oczek otrzymanych we wszystkich rzutach. Prawdopodobieństwo tego, że otrzymana suma wyniesie 2021 jest:

- [ ] a) większe od $\frac{2019}{6^{2020}}$,
- [ ] b) większe od $\frac{2020}{6^{2020}}$,
- [ ] c) większe od $\frac{2021}{6^{2020}}$.

**Zadanie 20.** Funkcja $f$ określona wzorem $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx + 2020$, gdzie $a \neq 0$ jest malejąca. Wynika stąd, że:

- [ ] a) $c > 0$,
- [ ] b) $b > 0$,
- [ ] c) $a < 0$.

## 4.12 22 kwietnia 2022

**Zadanie 1.** Suma wszystkich liczb naturalnych dodatnich $n$, dla których liczba $n^3 + 5$ jest podzielna przez $n + 3$ jest:

- [ ] a) większa od 30,
- [ ] b) większa od 40,
- [ ] c) większa od 50.

**Zadanie 2.** Wielomian $W(x) = x^3 + 3ax^2 + 4a^2x - 1$, gdzie $a$ jest parametrem należącym do zbioru liczb rzeczywistych:

- [ ] a) może mieć dwa różne miejsca zerowe,
- [ ] b) dla $a > 0$ ma dokładnie trzy różne miejsca zerowe,
- [ ] c) dla $a < 0$ ma dokładnie trzy różne miejsca zerowe.

**Zadanie 3.** Najmniejsza wartość, którą przyjmuje wyrażenie $\dfrac{ab}{a^2+b^2} + \dfrac{a^2+b^2}{ab}$, gdzie $a > 0$ i $b > 0$, wynosi:

- [ ] a) 5,
- [ ] b) 2,5,
- [ ] c) 0.

**Zadanie 4.** Największą wartością funkcji $f(x) = \sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} - \sqrt{x - 4\sqrt{x-4}}$ jest liczba:

- [ ] a) mniejsza od 6,
- [ ] b) mniejsza od 5,
- [ ] c) mniejsza od 4.

**Zadanie 5.** Liczby $x, y, z, w$ są rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x = yzw, \\ x + y = zw, \\ x + y + z = w, \\ x + y + z + w = 1 \end{cases}$. Prawdą jest, że:

- [ ] a) $xyzw = 4$,
- [ ] b) $xyzw < 0{,}001$,
- [ ] c) $xyzw = \frac{1}{1764}$.

**Zadanie 6.** Ze zbioru wszystkich łamanych $PWSZP$, gdzie $P, W, S, Z$ są różnymi wierzchołkami danego 2022-kąta wypukłego, wybieramy losowo jedną łamaną. Prawdopodobieństwo, że jest ona brzegiem czworokąta wypukłego jest:

- [ ] a) mniejsze niż $\frac{1}{4}$,
- [ ] b) mniejsze niż $\frac{1}{3}$,
- [ ] c) mniejsze niż $\frac{1}{2}$.

**Zadanie 7.** Prawdą jest, że równanie $xy + yz + zx = 2022$:

- [ ] a) posiada nieskończenie wiele rozwiązań w zbiorze liczb całkowitych,
- [ ] b) nie posiada rozwiązań w zbiorze liczb całkowitych,
- [ ] c) nie posiada rozwiązań w zbiorze liczb naturalnych.

**Zadanie 8.** Dany jest wielomian $W(x) = (x^{2021} + x - 1)^{2022}$. Suma współczynników przy parzystych potęgach $x$ tego wielomianu jest:

☐ a) dodatnia,
☐ b) równa $\frac{3^{2022}+1}{2}$,
☐ c) większa od $3^{2022}$.

**Zadanie 9.** Jeśli $a - \frac{1}{a} = 1$, to:

☐ a) $a^5 - \frac{1}{a^5} = 1$,
☐ b) $a^5 - \frac{1}{a^5} > 10$,
☐ c) $a^5 - \frac{1}{a^5} = 11$.

**Zadanie 10.** Kwadrat o polu 1 $m^2$ można całkowicie pokryć trzema kwadratami o polach:

☐ a) 8000 $cm^2$,
☐ b) 8500 $cm^2$,
☐ c) 9500 $cm^2$.

**Zadanie 11.** Liczba $a = \dfrac{1}{2\sin 10^o} - 2\cos 20^o$. Prawdą jest, że:

☐ a) $a \in \left\langle \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right\rangle$,
☐ b) $a \in \left\langle \frac{3}{4}, 1 \right\rangle$,
☐ c) $a \in \left\langle \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right\rangle$.

**Zadanie 12.** Liczby $p, q$ są takimi liczbami całkowitymi, że wielomian $W(x) = x^3 + x^2 - 10$ przy dzieleniu przez $(x - p)$ daje resztę $q$, a przy dzieleniu przez $(x - q)$ daje resztę $p$. Prawdą jest, że:

☐ a) $W(p + q) > p \cdot q$,
☐ b) $W(p + q) > p^2 \cdot q^2$,
☐ c) $W(p + q) > p^3 \cdot q^3$,

**Zadanie 13.** Rozwiązaniem nierówności $4^x - 10^x < 2 \cdot 25^x$ jest:

☐ a) każda liczba rzeczywista,
☐ b) każda liczba ujemna,
☐ c) każda liczba większa od $\log_{0,4} 2$.

**Zadanie 14.** Liczbę 2022 można przedstawić w postaci sumy:

☐ a) pięciu kolejnych liczb naturalnych parzystych,
☐ b) dziesięciu kolejnych liczb naturalnych parzystych,
☐ c) dwudziestu kolejnych liczb naturalnych parzystych.

**Zadanie 15.** Wielomian $W(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ ma trzy różne pierwiastki ujemne. Zatem :

- [ ] a) $b < 0 \ \land \ c > 0 \ \land \ d > 0$,
- [ ] b) $b > 0 \ \land \ c > 0 \ \land \ d > 0$,
- [ ] c) $b < 0 \ \land \ c < 0 \ \land \ d > 0$.

**Zadanie 16.** Prawdziwa jest nierówność :

- [ ] a) $\frac{\sin 3}{\cos 4} > 0$,
- [ ] b) $\frac{\sin 2}{\cos 3} > 0$,
- [ ] c) $\frac{\sin 1}{\cos 2} > 0$.

**Zadanie 17.** Ciąg liczb naturalnych dodatnich podzielono na grupy $(1)$, $(2,3)$, $(4,5,6)$, $(7,8,9,10), \ldots$. Wobec tego suma liczb występujących w 2022 grupie jest :

- [ ] a) większa od $2022^2$,
- [ ] b) większa od $1011 \cdot 2022^2$,
- [ ] c) większa od $1011 \cdot (2022^2 + 1)$.

**Zadanie 18.** Liczba $\dfrac{1}{\log_3 \pi} - \dfrac{1}{\log_4 \pi}$ jest :

- [ ] a) liczbą ujemną,
- [ ] b) większa od $-1$,
- [ ] c) mniejsza od $-2$.

**Zadanie 19.** Czterech chłopców i dwie dziewczynki kupiło bilety do kina na miejsca numerowane od 1 do 6 w tym samym rzędzie. Na ile sposobów mogą oni wybrać miejsce, tak, aby dziewczynki nie siedziały obok siebie?

- [ ] a) więcej niż 450 sposobów,
- [ ] b) więcej niż 470 sposobów,
- [ ] c) więcej niż 490 sposobów.

**Zadanie 20.** Kwadratem liczby naturalnej jest liczba :

- [ ] a) $2018 \cdot 2019 \cdot 2020 \cdot 2021 + 1$,
- [ ] b) $2019 \cdot 2020 \cdot 2021 \cdot 2022 + 1$,
- [ ] c) $2020 \cdot 2021 \cdot 2022 \cdot 2023 + 1$.

## ZADANIA OTWARTE

1. Napisz równanie prostej, która jest styczną do wykresów funkcji zarówno $f(x) = x^2 + 8x + 4$ jak i $g(x) = x^2 + 4x + 8$.

2. Przekątne czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie $O$. Jakie najmniejsze pole może mieć ten czworokąt, jeśli pole trójkąta $AOB$ jest równe 4, a pole trójkąta $COD$ wynosi 9.

## 4.13 23 marca 2023

**Zadanie 1.** Liczba $\cos^6 15° - \sin^6 15°$ jest równa :

- [ ] a) $\frac{15\sqrt{3}}{32}$ ,
- [ ] b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ,
- [ ] c) $\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2 30°\right)\cos 30°$ .

**Zadanie 2.** W zbiorze punktów płaszczyzny o obu współrzędnych całkowitych porusza się pionek według następującej zasady: z punktu $(x, y)$ może przesunąć się do punktu $(x+1, y+1)$ lub $(x+1, y-1)$. Różnych dróg prowadzących od punktu $(0, 0)$ do punktu $(2023, 2021)$ jest :

- [ ] a) $2023!$ ,
- [ ] b) więcej niż $2023 \cdot 2021$ ,
- [ ] c) mniej niż $2023$ .

**Zadanie 3.** Funkcja $f$ określona jest wzorem $f(x) = \sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x - 4\sqrt{x-4}}$, gdzie $x \geqslant 4$. Jeżeli $W = f(2\pi)$, to :

- [ ] a) $W > 3$ ,
- [ ] b) $W > \pi$ ,
- [ ] c) $W$ jest liczbą wymierną .

**Zadanie 4.** Jeśli rozwiązania równania $x^2 + bx + c = 0$ są sześcianami rozwiązań równania $x^2 + mx + n = 0$, to :

- [ ] a) $m^3 = b + 3mn$ ,
- [ ] b) $b = m^3 + 3mn$ ,
- [ ] c) $b + c = m^3 + n^3$ .

**Zadanie 5.** Niech $K = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 \leqslant 9\}$ oznacza zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej. Jeżeli dla pewnej liczby rzeczywistej $m$ mamy $(2, m) \in K$ i $(m-2, 1) \notin K$, to :

- [ ] a) $m = -\sqrt{5} + 1$ ,
- [ ] b) $m = -\sqrt{5} + 2$ ,
- [ ] c) $m = -\sqrt{5} + 3$ .

**Zadanie 6.** Jeśli $\alpha$ jest kątem ostrym i $\sin 2\alpha = k$, to $\sin\alpha + \cos\alpha$ równa się :

- [ ] a) $\sqrt{k} + 1$ ,
- [ ] b) $2\sqrt{k+1}$ ,
- [ ] c) $\sqrt{k+1}$ .

**Zadanie 7.** W zbiorze liczb rzeczywistych równanie $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = m$, gdzie $m$ jest parametrem :

- [ ] a) ma co najmniej 2023 różnych rozwiązań dla $m = 4$ ,
- [ ] b) ma co najmniej 3 różne rozwiązania dla $m = 2023$ ,
- [ ] c) ma co najmniej 2023 różne rozwiązania dla $m = 0{,}2023$ .

**Zadanie 8.** W trapezie $ABCD$, $AB||CD$, punkty $E$ i $F$ są środkami ramion trapezu, punkt $G$ należy do podstawy $AB$ i jest różny od punktów $A$ i $B$, punkt $H$ należy do podstawy $DC$ i jest różny od punktów $D$ i $C$. Pole czworokąta wypukłego, którego wierzchołkami są punkty $E, G, F, H$ jest równe $P$. Pole trapezu $ABCD$ jest:

☐ a) większe od $2P$,
☐ b) większe od $\sqrt{3}P$,
☐ c) mniejsze od $\sqrt{5}P$.

**Zadanie 9.** Elementami zbioru $A$ są te argumenty, dla których funkcja $f(x) = \Big||x^2-1|-2\Big|$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, ma ekstrema lokalne. Ze zbioru $A$ losujemy jeden element. Prawdopodobieństwo, że dla wybranego elementu funkcja $f$ ma lokalne minimum jest:

☐ a) większe od $\frac{1}{5}$,
☐ b) większe od $\frac{2}{5}$,
☐ c) większe od $\frac{3}{5}$.

**Zadanie 10.** Liczba $2023^{11} + 2021^{11} + 2017^{11} - 1$ jest liczbą:

☐ a) parzystą,
☐ b) pierwszą,
☐ c) podzielną przez 5.

**Zadanie 11.** W nieskończonym ciągu geometrycznym zbieżnym suma wyrazów o numerach parzystych jest 2023 razy mniejsza od sumy wyrazów o numerach nieparzystych. Iloraz tego ciągu jest liczbą:

☐ a) mniejszą od $\frac{1}{2023}$,
☐ b) mniejszą od $\frac{1}{20230}$,
☐ c) mniejszą od $\frac{1}{202300}$.

**Zadanie 12.** Wszystkich liczb sześciocyfrowych w których zapisie nie występuje zero i występują dokładnie cztery różne cyfry parzyste jest:

☐ a) więcej niż 10000,
☐ b) więcej niż 5000,
☐ c) więcej niż 1000.

**Zadanie 13.** Jeżeli $\frac{x}{y} < \frac{z}{w}$, gdzie $x, y, w, z \in \mathbb{R}_+$ a $M = \frac{x+z}{y+w}$, to:

☐ a) $M > \frac{x}{y}$,
☐ b) $M \leqslant \frac{x}{y}$,
☐ c) $\log \frac{x}{y} < \log M$.

**Zadanie 14.** Przekątne $AC$ i $BD$ trapezu $ABCD$ o podstawach $AB$ i $CD$, gdzie $|AB| > |CD|$, przecinają się w punkcie $O$. Jeżeli pole trójkąta $ABO$ jest równe $m^2$, a pole trójkąta $CDO$ jest równe $m$, to pole trapezu $ABCD$ jest:

☐ a) równe $\sqrt{2}m(1+\sqrt{m})^2$,
☐ b) równe $\sqrt{3}m(1+\sqrt{m})^2$,
☐ c) równe $2m(1+\sqrt{m})^2$,

**Zadanie 15.** Równanie $2x^2 - y^2 = xy$ opisuje na płaszczyźnie :

☐ a) parabolę ,

☐ b) punkt ,

☐ c) okrąg .

**Zadanie 16.** Resztą z dzielenia wielomianu $W(x) = x^{2023} + x^2 + \frac{1}{2023}$ przez wielomian $P(x) = x^2 - 1$ jest :

☐ a) $x + 2023$ ,

☐ b) $x - 2023$ ,

☐ c) $x + \frac{2024}{2023}$ .

**Zadanie 17.** Liczba 2023! kończy się :

☐ a) więcej niż 400 zerami ,

☐ b) więcej niż 500 zerami ,

☐ c) więcej niż 600 zerami .

**Zadanie 18.** Par liczb naturalnych dodatnich $(m, n)$ spełniających równanie $1! + 2! + 3! + \ldots + n! = m^2$ jest :

☐ a) więcej niż 2 ,

☐ b) więcej niż 3 ,

☐ c) więcej niż 4 .

**Zadanie 19.** Niech liczby $x_1$ i $x_2$ będą naturalnymi pierwiastkami równania $2023x^2 + mx + 4046 = 0$. Wartość wyrażenia $x_1^{2023} + x_2^{2023}$ może być :

☐ a) liczbą podzielną przez 10 ,

☐ b) liczbą nieparzystą ,

☐ c) liczbą ujemną .

**Zadanie 20.** Która z następujących funkcji spełnia warunek $f(3x) = 2f(x)$?

☐ a) $f(x) = x^{\frac{\log 2}{\log 3}}$ ,

☐ b) $f(x) = x^{\frac{\log 3}{\log 2}}$ ,

☐ c) $f(x) = 3^{\frac{\log x}{\log 2}}$ .

## ZADANIA OTWARTE

1. Dany jest trapez o polu $P$ i podstawach $AB$ i $CD$. Dwusieczna kąta $ABC$ jest prostopadła do ramienia $AD$ i przecina je w takim punkcie $E$, że $\frac{|AE|}{|ED|} = 3$. Oblicz pole czworokąta $BCDE$ .

2. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a$ i $b$ zachodzi nierówność

$$(a + b)^2 + 3 \geqslant 3(a + b) + ab \; .$$

# Bibliografia


1. F. Bogowski, Cz. Burniak, *Matematyka: Zadania i testy z egzaminów wstępnych, lata 1980-1985*, Wyd. UMCS, Lublin 1992.

2. F. Bogowski, Cz. Burniak, *Matematyka – testy z egzaminów wstępnych na UMCS z lat 2000-2003*, Wyd. Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin 2003.

3. K. Cegiełka, J. Przyjemski, *I Ty zostaniesz studentem*, Oficyna Wydawniczo-Poligraficzna „Adam”, Warszawa 1996.

4. A. Cewe, M. Pawłowicz, H. Pawłowski, *Matematyka – Kangury 2 i inne międzynarodowe konkursy z matematyki*, Wyd. Podkowa, Gdańsk 1997.

5. B. Gdowski, E. Pluciński, *Zadania i testy z matematyki dla uczniów szkół średnich*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1995, 1996.

6. T. Gronek, J. Magdziarz, *Testy z matematyki dla uczniów szkół średnich i kandydatów na studia*, Wyd. Szkolne PWN, Warszawa 1977.

7. K. Kłaczkow, M. Kurczab, E. Świda, *Analiza matematyczna dla licealistów, Zbiór zadań*, Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro, Warszawa 2002.

8. L. Kourliandtchik, *Wędrówki po krainie nierówności*, Aksjomat, Toruń 2000.

9. L. Kourliandtchik, *Powrót do krainy nierówności*, Aksjomat, Toruń 2001.

10. B. Mokrski, J. Siwy, T. Szymczyk, *Matematyczny sezam*, FHU Miła, Mikołów 3013.

11. H. Pawłowski, *Kółko matematyczne dla olimpijczyków*, Turpress, Toruń 1994.

12. H. Pawłowski, *Na olimpijskim szlaku*, Oficyna Wydawnicza „Tutor”, Toruń 1999.

13. H. Pawłowski, *Zbiór zadań dla liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego i technikum, Linia 1 ponadstandardowa*, Operon, Gdynia 2003.

14. P. Pruszanowski (red.), *Matematyka, informatyka, materiały egzaminacyjne dla kandydatów na studia*, Wyd. Akademickie PLUS, Warszawa 2003.

15. J. Straburzyński, *Matematyka – zbiór zadań testowych dla szkoły średniej*, Wyd. Podkowa, Gdańsk 2001.

16. T. Supady, *Matematyka – zadania testowe wielokrotnego wyboru dla uczniów szkół średnich*, Wyd. „Tukan Remy” s.c., Piotrków Trybunalski 2002.

17. T. Wdowiak, *Matematyka, testy wielokrotnego wyboru*, Wyd. Podkowa, Gdańsk 1999.

18. W. Więsław, *Stare polskie zadania z matematyki*, Wyd. NOWIK, Opole 2000.